

時空合域連續小波轉換 分析近海波場影像可行性探討

莊士賢¹ 吳立中² 董東璟³ 高家俊⁴

¹ 國立成功大學海洋科技與事務研究所助理教授

² 國立成功大學水利及海洋工程研究所博士

³ 國立台灣海洋大學海洋環境資訊系助理教授

⁴ 國立成功大學水利及海洋工程研究所教授

摘要

時空合域(spatio-temporal)波場影像中隱含有波速及群波速度的資訊於其中。本文嘗試利用含速度轉換因子的時空合域小波轉換理論，分析近岸的海洋波場影像，推求波浪淺化過程中波速與群波速度在時空的演變，藉以瞭解小波轉換此一數學方法應用於分析非均勻近海波場影像的可行性。本研究發展出此一數學理論分析數位化波場資料的演算過程，推導出小波分析結果與波浪速度以及群波速之間的數學關係，藉以將小波理論與波浪分析領域結合。經過分析與討論後，本文證實了時空合域連續小波轉換應用於非均勻波場分析的實用性。

關鍵詞：時空合域連續小波轉換、海洋波場影像、群波速度

The Feasibility of Coastal Wave Image Analysis by Spatio-temporal Wavelet Transform

Laurence Zsu-Hsin Chuang* Li-Chung Wu Dong-Jiing Doong Chia-Chuen Kao

* Assistant Professor, Institute of Ocean Technology and Marine Affairs, National Cheng Kung University

ABSTRACT

The aim of this research was to study wave field analysis by applying spatio-temporal wavelet transform, so as to understand the the feasibility of coastal wave field analysis by this theory. For the sake of applying wavelet theory to extract wave information from the inhomogeneous wave field, the algorithm of spatio-temporal wavelet transform was developed. The relationship between wave parameters and the wavelet analyzed results were also derived from this study. To understand the practicability and accuracy of wave calculation, the numerical algorithm was tested in simulated irregular wave fields. It is revealed that the use of spatio-temporal wavelet transform in analyzing inhomogeneous wave fields of random waves was feasible, even in coastal areas.

Keywords: Spatio-temporal wavelet transform; Sea wave field image; Wave group velocity

一、前言

隨著全球氣候暖化以及聖嬰現象的影響，近五年(2003 年~2007 年)侵台颱風的平均次數已經遽增至約 7.5 次。颱風或低氣壓所伴隨的強風、豪雨及巨浪都是造成海岸地區造成海岸災害的主因。其中

海洋波浪是一種複雜多變的物理現象，需透過長期的海況監測方能更完整掌握其特性。海況觀測結果是研究海洋環境特性的資料來源，也是理論計算及模型試驗驗證結果的依據。

海況觀測方法可分為直接的現場量測(in-situ measurement)與間接的遙感探測(remote sensing)兩

種方式。遙測可針對觀測區域進行大範圍空間波場的觀測，快速且廣泛的獲得海面波場資料，是近年來學界所致力發展的觀測技術之一。

隨著空間波場遙測技術的進步與發展，國內外許多學者開始投入波場的分析及其後續應用等研究議題(Tinin et al., 2002)(Girolamo, 1995)(Kawasaki and Iwata, 1998)。連續波場影像中隱含有波速與群波速等重要的波浪訊息，波速(wave celerity)與群波速度(wave group velocity)是研究海洋科學以及海洋工程應用所需考慮的重要因子。舉凡：波浪淺化、波能通率、波能傳遞、緩波方程式、海底泥砂運行以及波浪數值模式等相關研究，都會涉及波速與群波速度(Reeve et al., 2004)。有關從波場計算波速與群波速度的方法，往昔是利用波譜分析方法，將波場之序列變化轉換成波浪能量在頻率域與波數域上之聯合分布，進而透過波譜中頻率與波數之間的關係推求出波場的波速。往昔的方法適用於分析定常(stationary)及均勻(homogeneous)的波浪場，其分析所得結果是利用整個波場的波速平均值代表整個波場的波速與群波速度，以波速及群波速度分析結果的平均值代表空間中大範圍波場的波浪特性。然而自然界的訊號常存在有非定常及非均勻的特性，空間波場訊號亦不例外。一般而言，若訊號的統計特性不隨時間改變，即可將該訊號視為定常訊號。相較於時間訊號對定常性的定義，空間訊號的定常性則被稱為均勻性。亦即若訊號的統計特性不隨空間改變，即可將該訊號視為均勻訊號。

如圖 1 所示，為一近岸波場之影像案例。由於受到近岸地形水深之影響，導致波場中不同位置之波浪特性都不盡相同。透過直觀目測圖 1 的波場即能發現其波數與波向明顯隨空間改變。根據線性波理論，波浪的波速值與波數有直接的關係，不難推斷出在該近岸波場案例的波速值會隨空間改變。因此以單一個波速平均值理應無法完整表現出空間中大範圍波場的波速特性。

近幾十年來，一套新興的數學理論-小波轉換在學界蓬勃發展。該理論已被證明其具有分析非定常以及非均勻訊號之能力，並已被廣泛地應用在各種訊號的分析。一種適合分析時空合域訊號的時空合域小波轉換理論(spatio-temporal wavelet transform)於最近幾年被提出(Mujica 1999; Antoine et al. 2004)

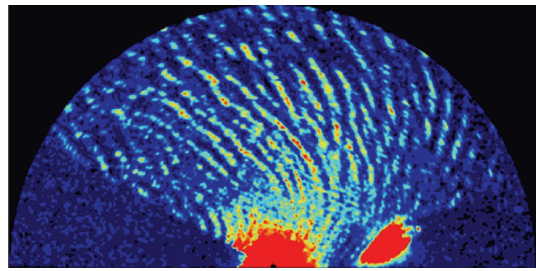


圖 1 非均勻波場影像案例

。時空合域小波轉換與一般常見之高維度小波轉換(high dimensional wavelet transform)理論類似，但其著重於「同步」分析時空合域之訊號，適用於分析具有時間以及空間維度資訊的波場影像序列。

與一般高維度小波轉換理論的差異在於時空合域小波轉換引入含速度轉換因子(speed tuning parameter)之小波母函數，能偵測空間影像中等速或加速度移動之物件，並計算出其速度值(Mujica et al., 2000)。近岸海域的波場因受到地形之影響，波浪易產生淺化及變形，造成波浪傳遞過程中，波速亦隨之改變。因此大部分的近岸海域的波場影像都可視為一種非均勻的訊號，其中所隱含的波速資訊亦屬非均勻。從小波轉換的數學理論發現，時空合域小波轉換應該具有解析出非均勻波場影像波速變化之能力。但目前還尚未有相關之研究將該理論的速度轉換因子應用至分析波速及群波速度。

本文目的在於應用含速度轉換因子的時空合域小波轉換理論，分析時間連續之海洋波場影像，以推求波速與群波速度，直接求得不同成份波的移動速度(波速與群波速度)，藉此分析出非均勻的波浪場或是淺化過程中波速在時空的演變。

二、理論分析

2.1 時空合域小波轉換理論

小波轉換目前已廣泛被應用於多門學科領域，但其應用範圍多著重在一維訊號的分析及二維影像訊號的辨識與增強，於分析三維度時空合域波浪場時序列的應用則還未獲得普遍的關注。本研究將三維度時空合域小波轉換相關理論及波速/群波速度計算之方法敘述如下(Mujica et al., 2000)(Duval-Denstin and Murenzi, 1992)。

考慮一時空合域之波場影像序列，其包含了時間與空間之訊號，假設其數學關係之存在如式(1)所

示，則影像時序列 $s(\bar{x}, t)$ 的傅立葉轉換可表示如式(2)，此即影像時序列訊號於傅立葉空間的表示式。

$$\|s\|^2 = \iint |s(\bar{x}, t)|^2 d^2\bar{x}dt < \infty \quad (1)$$

$$\hat{s}(\bar{k}, \omega) = (2\pi)^{-1.5} \iint s(\bar{x}, t) e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{x} - \omega t)} d^2\bar{x}dt \quad (2)$$

上式中 ω 為角頻率； \bar{k} 為空間角頻率，其物理意義為空間訊號 \bar{x} 所對應之頻率域，於影像分析領域被稱為空間頻率，應用於波浪領域即為海浪的波數。

影像時序列 $s(\bar{x}, t)$ 的時空合域小波轉換則可表示如式(3)：

$$S(\bar{b}, \tau, \theta, a, c) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \iint a^{-3/2} \times \psi^*(a^{-1}c^{-1/3}r_\theta(\bar{x} - \bar{b}), a^{-1}c^{2/3}(t - \tau)) s(\bar{x}, t) d^2\bar{x}dt \quad (3)$$

式(3)中的 C_ψ 為小波函數的容許條件(Antoine et al., 2004)。 τ 為小波函數於時間域(time domain)的位移因子，乃控制小波函數在被分析影像序列時間域的移動量。 \bar{b} 與 τ 的物理意義相似，為小波函數於空間域(space domain)的位移因子，乃控制小波函數在被分析影像序列空間域的移動量。 θ 為小波函數的旋轉因子，控制小波函數在空間域的旋轉，其與小波函數旋轉量 r_θ 的數學關係如式(4)所示。 a 為尺度因子，控制小波函數的尺寸，於訊號分析領域可用來分析訊號的頻率。 c 為速度轉換因子，可偵測時空訊號中，某一物件的移動速度為本研究分析波速的重要關鍵(莊等，2007)。

$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (4)$$

三維 Morlet 小波母函數於時空域 ψ 及頻率-波數域 $\hat{\psi}$ (小波母函數經三維傅立葉轉換後所得之函數)，亦即小波母函數於傅立葉空間的表示式如式(5)與式(6)所示(Mujica, 1999)。

$$\psi(\bar{x}, t) = \begin{bmatrix} e^{i(\bar{k}_0 \cdot A^{-1}\bar{x})} \cdot e^{-0.5|A^{-1}\bar{x}|^2} \\ -e^{-0.5|A^{-1}\bar{x}|^2} \cdot e^{-0.5|\bar{k}_0|^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{i\omega t} \cdot e^{-0.5t^2} - e^{-0.5t^2} \cdot e^{-0.5\omega_0^2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\hat{\psi}(\bar{k}, \omega) = \begin{bmatrix} e^{-0.5|A\bar{k} - \bar{k}_0|^2} - e^{-0.5(|A\bar{k}|^2 + |\bar{k}_0|^2)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{-0.5|\omega - \omega_0|^2} - e^{-0.5(\omega^2 + \omega_0^2)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

上式中， $A = \text{diag}[\varepsilon^{-0.5}, 1]$ ， $\varepsilon \geq 1$ ，為 usual anisotropy matrix。參數 $|\bar{k}_0|$ 與 $|\omega_0|$ 為小波母函數於傅立葉空間(小波母函數經傅立葉轉換後所得之函數)的中心

位置，也控制著小波母函數的波形震盪程度。

2.2 群波速計算方法

根據小波轉換理論，小波母函數 $\hat{\psi}$ 與小波函數 $\psi_{\bar{b}, \tau, \theta, a, c}$ 於傅立葉空間中的關係如下所示：

$$\hat{\psi}_{\bar{b}, \tau, \theta, a, c}(\bar{k}, \omega) = a^{3/2} \cdot \hat{\psi}(ac^{1/3}r_\theta\bar{k}, ac^{-2/3}\omega) \cdot e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{b} + \omega\tau)} \quad (7)$$

由上式可推導出經由 $\tau, \bar{b}, \theta, a, c$ 等參數作用後，原先於波數域的 \bar{k}_0 會移動至 \bar{k}_p ；原先於頻率域的 ω_0 會移動至 ω_p ，其間的關係如下所示：

$$\bar{k}_p = \frac{\bar{k}_0}{ac^{1/3}r_\theta} \quad (8)$$

$$\omega_p = \frac{\omega_0}{ac^{-2/3}} \quad (9)$$

將數位訊號離散化的概念引入後，可獲得如下關係式：

$$ac^{-2/3} = \frac{T_t \omega_0}{\pi \Delta t N_t f} \quad (10)$$

$$ac^{1/3} = \frac{T_x \cdot k_{x0}}{\pi \Delta x N_x l_x} \quad (11)$$

上式中的 T_t 與 T_x 為小波母函數於時間域及空間域的視窗寬度(Jordan and Powers, 1997)。 Δt 為被分析訊號於時間域的取樣間格； Δx 為被分析訊號於空間域的取樣間格。 N_t 與 N_x 則分別為小波函數離散化後於時間域與空間域的長度。結合上述式子，可獲得小波轉換的尺度因子、速度因子與波浪角頻率 ω 、波數 k 之間的關係如下所示：

$$c = \frac{\Delta t \cdot N_t \cdot T_x \cdot k_{x0} \cdot f}{\Delta x \cdot N_x \cdot T_t \cdot \omega_0 \cdot l_x} \quad (12)$$

若上式分子與分母同乘 2π 可得：

$$c = \frac{\Delta t \cdot N_t \cdot T_x \cdot k_{x0} \cdot \omega}{\Delta x \cdot N_x \cdot T_t \cdot \omega_0} \cdot \frac{\omega}{k_x} = \frac{\Delta t \cdot N_t \cdot T_x \cdot k_{x0} \cdot v}{\Delta x \cdot N_x \cdot T_t \cdot \omega_0} \quad (13)$$

上式中的 c 為小波轉換的速度因子，為無因次單位。 v 即為波速，其單位為 m/sec，經由轉換後，可獲得波速如下：

$$v = \frac{\Delta x \cdot N_x \cdot T_t \cdot \omega_0}{\Delta t \cdot N_t \cdot T_x \cdot k_{x0}} \cdot c \quad (14)$$

從式(9)~式(11)可看出，當 $\varepsilon = 1$ 及 $\bar{k}_0 = (\omega_0, 0)$ ，小波母函數於時間域及空間域的視窗寬度一致，亦即 $T_t = T_x$ ，則上式可簡化為下：

$$v = \frac{\Delta x \cdot N_x \cdot \omega_0}{\Delta t \cdot N_t \cdot k_{x0}} \cdot c \quad (15)$$

上述為透過小波轉換分析波速(wave celerity)的

方法。群波速度(wave group speed)的理論值計算，則透過線性波理論求解，如式(16)所示，

$$C_g = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right) v \quad (16)$$

d 為水深；如透過小波轉換推估群波速度則如下：

$$C_g = \frac{E(k_x, k_y)}{E(\omega, \theta)} \cdot k \quad (17)$$

$E(\omega, \theta)$ 是小波轉換能譜對波數積分求得之能量值； $E(k_x, k_y)$ 是從小波轉換能譜對頻率積分後得 $E(k, \theta)$ ，再轉換後所得之尖峰能量。

三、分析方法之驗證

3.1 波場模擬

為瞭解時空域連續小波轉換應用於波場影像之波速及群波速分析的可行性與其分析結果之準確度，本文應用數值模擬的波場影像時序列進行分析驗證。由於大自然的波場多為隨機的不規則波浪，本研究用來驗證分析方法的模擬波場將使用不規則波浪所形成的波場。

不規則波浪場的模擬首先必須考慮輸入的方向波譜形式。考慮到波場向近岸傳遞時，可能會進入淺水區，因此採用考慮到水深影響的 TMA 譜作為被輸入之一維譜 (Chuang et al., 2008)(Goda, Y. 1999)。

模擬一水深漸變且無海流影響的不規則波場，其相關起始件如下： $H_{1/3}=2.5\text{m}$ ，對應之平均週期 $T_{H1/3}=8\text{sec}$ ，起始波向=45 度。模擬所得不規則波場及其對應之水深如圖 2 所示。

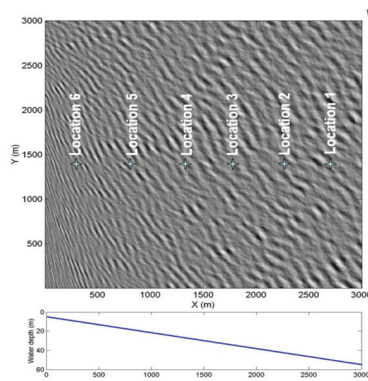


圖 2 不規則模擬波場及其對應之水深

應用本研究所發展之小波轉換分析方法對圖 2 之模擬波場進行分析，分析所得之波譜結果如圖 3

所示。理論上，若模擬波場之尺寸為 $N_x \text{ pixel} \times N_y \text{ pixel}$ ，經小波轉換分析後，在每一時間序列點上可獲得 $N_x \times N_y$ 個波譜結果，亦即於波場的每一個位置點都會輸出一個波譜計算結果，這是小波轉換應用於分析非均勻訊號的優勢所在。然而上述所獲得之波譜結果之數量相當龐大 ($N_x \times N_x \times N_y$)，為能將小波轉換分析結果作有效的展現並方便討論，本文僅選取圖 2 中 Location1~Location6 六個不同位置點在某一時刻的波譜結果進行探討。選取這六個點的原因為其所在位置的水深都不相同，藉此能瞭解波場因水深影響造成淺化後之波浪特性能否透過小波轉換的分析結果完整的表達出。

圖 3 中的曲線為波浪的 dispersion relation 理論曲線。由於本研究模擬的波場是根據 dispersion relation 描述波場中頻率與波數間的關係，圖 3 之經小波轉換後所得波浪譜之頻率與波數能量分佈除了與輸入之目標波譜一致外，確實與 dispersion relation 理論曲線一致，這說明了小波轉換應用於波場分析的可行性與正確性。此外，從圖 3 的分析結果也發現到波浪譜中的波能尖峰位置有隨水深變淺而往高波數位置移動的現象。此與波浪淺化後，波浪波數會變大的自然現象符合。

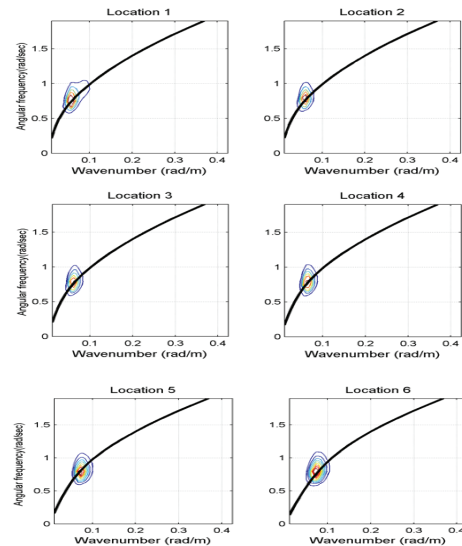


圖 3 不同水深處利用小波轉換分析波場影像所得之波浪譜

本研究進一步利用上述的譜分析結果計算出波浪參數，如圖 4，為應用小波轉換所計算出波數/波

向與理論值之間的比較結果。分析結果顯示，波數計算的相對誤差在 9%以內；波向計算的誤差在 7 度以內。其中於 Location1 以及 Location6 兩位置點的分析結果誤差較大。這應該是受到波場邊界的影響，此一問題將於後面討論之。若不考慮 Location1 及 Location6 兩位置點的分析結果，其餘位置點的分析結果之準確度明顯較高。如圖 5 與圖 6 所示，若不考慮靠近影像邊界位置點的分析結果，於 Location2~Location5 的波速與群波速度計算結果的誤差都在 6%以內。

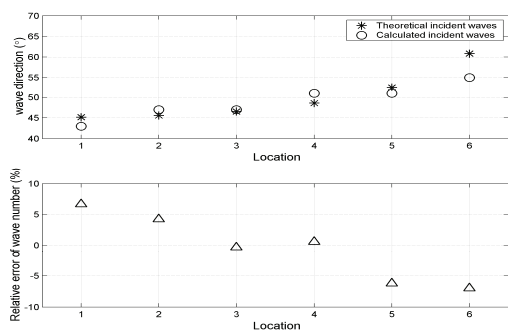


圖 4 利用小波轉換分析波場影像所得不同水深處之波數與波向準確度

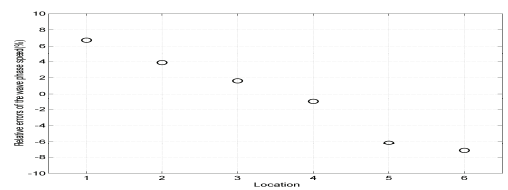


圖 5 利用小波轉換分析波場影像所得不同水深處之波速準確度

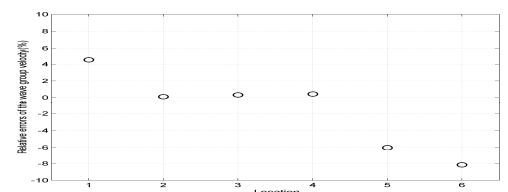


圖 6 利用小波轉換分析波場影像所得不同水深處之群波速準確度

四、邊界對波場分析之影響

透過前一節的模擬波場分析，可發現到圖 2 波場中於 Location1 及 Location6 兩位置點的分析結果誤差較大，這應是受到波場邊界的影響。圖 7 為小波轉換分析訊號之示意圖。由式(3)可看出，小波轉

換在數學上為小波函數與影像訊號的 scalar product。如圖 7(a)所示，若用小波轉換分析波場影像中離邊界較遠處之波浪，即是用一完整之小波函數與訊號進行 scalar product。圖 7(b)則顯示出於影像邊界附近區域進行分析時，所使用的小波函數受影像邊界之限制，並非一完整之小波函數，因而造成了波浪分析結果的明顯誤差。由此可進一步推論在靠近影像邊界的同一位置的計算精度應會隨著成份波的不同波長而改變。

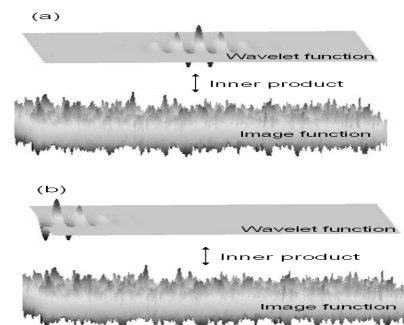


圖 7 小波轉換分析訊號之示意圖

為證實上述之推論，並考量波長在淺化過程會逐漸變短，故本研究嘗試利用小波轉換分析不同海底斜率及波浪週期的模擬波場，藉以獲得不同海底地形以及波浪條件的波浪分析結果，再透過統計分析，計算小波轉換分析位置與波浪計算準確度之間的關係。所模擬波場的週期條件範圍為 5 sec~19 sec；波場對應的海底底床斜率條件範圍則為 0.02~0.1，此已考慮了大多數風湧浪以及海底床之斜率條件。本研究將上述的分析結果與理論值進行比對，將所有案例的計算結果進行均方根誤差的計算。計算結果如圖 8 所示，小波轉換分析波場的準確度確實會受到波場邊界之影響。分析位置愈遠離波場邊界，分析結果之誤差愈小。當分析位置遠離波場邊界的距離超過波場的半個主波長時，波浪計算的無因次均方根誤差將小於 5%。

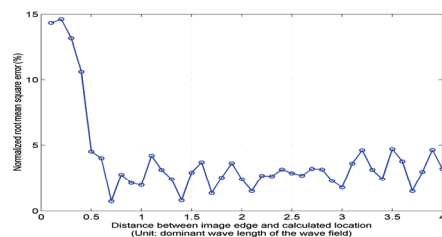


圖 8 波場分析位置與波浪計算準確度之間的關係

五、結論

波場為海表面於時間域及空間域的的水位變化，透過適當的數學分析方法，可從中萃取出重要的波浪參數，以供後續之應用。海浪的波速與群波速度是海洋科學研究及海洋工程應用所需考慮的重要因子。本文探討含速度轉換因子的小波轉換應用於波場影像序列分析的可行性。藉由時空合域的連續小波轉換進行波場影像序列之分析，藉以更合理的描述波浪於近岸空間之演化特性，並避免波場的非均勻性影響波浪計算結果的正確性。

為瞭解小波轉換應用於波速分析的可行性與其分析結果之準確度，本文透過模擬不規則空間波場影像進行驗證。驗證結果發現，小波分析結果確實能表現出波場中波速與群波速的物理特徵。透過上述模擬波場的驗證過程中也發現到，應用小波轉換分析波場的準確度會受到波場邊界及波場的時空解析度的影響。本研究嘗試應用不同條件的波場進行分析，發現小波轉換分析波場的分析位置愈遠離波場邊界，分析結果的準確度愈高。當分析位置遠離波場邊界的距離超過波場的半個主波長時，波浪計算的無因次均方根誤差將小於 5%。經由前述的分析與討論，本文證實了時空合域連續小波轉換應用於非均勻波場分析的實用性。

謝誌

本論文係國科會專題研究計畫「時空合域連續小波轉換應用於波流場影像分析—(I)波場影像序列的波速與群波速分析」(編號 NSC 97-2218-E-006-010)之研究成果，承蒙國科會經費之補助使本研究得以順利完成，謹致謝忱。

參考文獻

1. 莊士賢、吳立中、董東璟、高家俊(2007) 「高維小波轉換應用於波場的波速與群波速分析之初探」，*第二十九屆海洋及海岸工程研討會論文集*，第 553-558 頁。
2. Antoine, J.-P., Murenzi, R., Vandergheynst, P. and Twareque Ali, S. (2004) *Two-Dimensional Wavelets and their Relatives*, Cambridge university press, Cambridge.
3. Chuang, L.Z.H., Wu, L.C., Kao, C.C. and Doong, D.J. (2008) "Two-dimensional Continuous Wavelet Transform of Simulated Spatial Images of Waves on a Slowly Varying Topography," *Ocean Engineering*, Vol. 35, pp.1039-1051.
4. Duval-Denstin, M. and Murenzi R. (1992) "Spatio-temporal Wavelet: Application to the analysis of Moving Patterns, Process in wavelet analysis and applications," In: *Proceedings of the international conference*, pp. 399-408.
5. Girolamo, P. (1995) "Computation of sea-wave direction of propagation of random wave," *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, Vol. 121, No.4, pp. 203-208.
6. Goda, Y. (1999) "A Comparative Review on the Functional Forms of Directional Wave Spectrum," *Coastal Engineering Journal*, Vol. 41, No. 1, pp. 1-20.
7. Jordan, D., Miksad, R.W. and Powers, E.J. (1997) "Implementation of the continuous wavelet transform for digital time series analysis," *Rev. Sci. Instrum.*, Vol. 68, pp. 1484-1494.
8. Kawasaki, K. and Iwata, K. (1998) "Numerical Analysis of Wave Breaking Due to Submerged Breakwater in Three-dimensional Wave Field," In: *Proceedings of the Coastal Engineering Conference*, Vol. 1, pp. 853-866.
9. Mujica, F.A. (1999) *Spatio-temporal Continuous Wavelet Transform for Motion Estimation*, Dissertation, School of Electrical and Computer Engineering, Georgia, USA.
10. Mujica, F.A., Leduc, J.P. Murenzi, R. and Smith M.J.T.(2000) "A New Motion Parameter Estimation Algorithm Based on the Continuous Wavelet Transform," *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 9, No. 5, pp. 873-888.
11. Reeve, D., Chadwick, A. and Fleming, C. (2004) *Coastal Engineering Processes, Theory and Design Practice*, Spon Press, New York.
12. Tinin, M.V., Kolesnik, S.N. and Kravtsov, Y.A. (2002) "An Integral Representation for the Field of the Wave Propagating in a Medium with Random Inhomogeneities of Different Scales," In: *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, Vol. 4678, pp. 605-609.