

# 高維小波轉換應用於波場影像的波速與群 波速分析之初探

莊士賢<sup>1</sup> 吳立中<sup>2</sup> 董東璟<sup>3</sup> 高家俊<sup>4</sup>

<sup>1</sup> 國立成功大學海洋科技與事務研究所助理教授

<sup>2</sup> 國立成功大學水利及海洋工程學系博士班研究生

<sup>3</sup> 國立台灣海洋大學海洋環境資訊系助理教授

<sup>4</sup> 國立成功大學水利及海洋工程學系教授

## 摘要

本文嘗試利用含速度轉換因子的高維小波轉換理論，分析海洋波場影像序列，以求出波速與群波速度，並初步探討分析影像中空間位置對計算結果準確性的影響。為驗證本文提出之方法的可行性，先初步模擬受到波浪折射、淺化、反射等效應影響之規則波場影像序列，利用高維小波轉換分析求得不同時間任一空間點之波速與群波速，再討論分析結果的準確性。結果顯示此一新分析工具確具推求波速與群波速的能力，但計算結果的準確度會受到被分析影像訊號的邊界所影響，遠離影像邊界區域求得之波速與群波速度有較高準確度。

關鍵字：高維小波轉換、波速、群波速度

## A Study of Multidimensional Wavelet Transform on Estimating Wave Celerity and Wave Group Speed from Ocean Images

Laurence Zsu-Hsin Chuang\* Li-Chung Wu Dong-Jiing Doong Chia-Chuen Kao

\* Assistant Professor, Institute of Ocean Technology and Marine Affairs, National Cheng Kung University

## ABSTRACT

A new image processing technique for analyzing consecutive ocean wave images by multidimensional wavelet transform using the Morlet wavelet as the mother wavelet is introduced. We are here trying to apply the new technique to wave celerity and wave group speed calculation. A series of numerical simulation of image sequences are analyzed to test the algorithm and to present quantitative comparisons of numerical and theoretical results on propagation of ocean waves for normal incidence, diffraction and reflection at coastal area. The accuracy of the method is also discussed.

Key words: multidimensional wavelet transform; wave celerity; wave group speed

## 一、前言

波速(wave celerity)與群波速度(wave group speed)是海洋科學研究及海洋工程應用所需考慮的重要因子。舉凡：波浪淺化、波能通率、波能傳遞、緩波方程式、海底泥砂運行及波浪數值模式等相關

研究，都會涉及波速與群波速度(Reeve et al., 2004)。

隨著海洋觀測技術的進步，透過雷達遙測的方法能同時獲得時間域及空間域的海面波浪場變化，利用波譜分析方法(三維傅立葉轉換)，可將波場之序列變化轉換成波浪能量在頻率域與波數域

上之聯合分布，進而推求出波場的波速。該法適用於分析定常(stationary)及均勻(homogeneous)的波浪場。因考慮到波場的變動並非完全的定常且均勻，如能透過具有分析非均勻訊號的分析方法，應能更合理的解析波場中波速與群波速在時域與空間域上的演變特性。

本研究嘗試應用具有分析非定常及非均勻訊號能力的小波轉換理論，並引入含速度因子之高維小波母函數(Mujica, 1999; Antoine et al., 2004)，作為波場序列的譜轉換工具。藉此可直接求得任一空間點與時間點的波速與群波速之演變，而無需像前人須經由分散關係式與其它物理關係的假設而求得。

本文旨在探討含速度轉換因子的小波轉換應用於波場序列分析的可行性，並將重點強調在波速與群波速計算結果的準確性，作為將此新工具應用在後續波流場分析與波場淺化研討的先期驗證工作。

## 二、理論分析

小波轉換目前已廣泛被應用於多門學科領域，但其應用範圍多著重在一維訊號的分析及二維影像訊號的辨識與增強，於分析三維度波浪場時序列的應用則還未獲得普遍的關注。為將小波轉換理論擴大應用於波場波速之計算，高維度小波轉換相關理論及波速計算之法敘述如下。

### 2.1 三維小波轉換基礎理論

考慮一影像時序列  $s(\bar{x}, t)$ ，其包含了時間與空間之訊號：

$$\|s\|^2 = \iint |s(\bar{x}, t)|^2 d^2 \bar{x} dt < \infty \quad (1)$$

影像時序列  $s(\bar{x}, t)$  的傅立葉轉換如式(2)所示，

$$\hat{s}(\bar{k}, \omega) = (2\pi)^{-1.5} \iint s(\bar{x}, t) e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{x} - \omega t)} d^2 \bar{x} dt \quad (2)$$

亦即影像時序列訊號於傅立葉空間的表示式。上式中  $\omega$  為角頻率； $\bar{k}$  為空間角頻率，其物理意義為空間訊號  $\bar{x}$  所對應之頻率域，於影像分析領域被稱為空間頻率，應用於波浪領域即為海浪的波數。

影像時序列  $s(\bar{x}, t)$  的高維小波轉換如式(3)所示，

$$S(\bar{b}, \tau, \theta; a, c) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \langle \psi_{\bar{b}, \tau, \theta; a, c} | s(\bar{x}, t) \rangle \quad (3)$$

其中  $S(\bar{b}, \tau, \theta; a, c)$  為  $s(\bar{x}, t)$  與小波函數  $\psi_{\bar{b}, \tau, \theta; a, c}$  的 scalar product (Antoine et al., 2004)。

式(3)可表示如式(4)所示，其中  $\psi^*$  為小波母函數  $\psi$  的共軛複數。

$$S(\bar{b}, \tau, \theta; a, c) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \iint a^{-3/2} \times \quad (4)$$

$$\psi^* (a^{-1} c^{-1/3} r_\theta (\bar{x} - \bar{b}), a^{-1} c^{2/3} (t - \tau)) s(\bar{x}, t) d^2 \bar{x} dt$$

式(4)中的  $\tau$  為小波函數於時間域(time domain)的位移因子，乃控制小波函數在被分析影像序列時間域的移動量。 $\bar{b}$  與  $\tau$  的物理意義相似，為小波函數於空間域(space domain)的位移因子，乃控制小波函數在被分析影像序列空間域的移動量。 $\theta$  為小波函數的旋轉因子，控制小波函數在空間域的旋轉，其與小波函數旋轉量  $r_\theta$  的數學關係如式(5)所示。 $a$  為尺度因子，控制小波函數的尺寸，於訊號分析領域可用來分析訊號的頻率。 $c$  為速度因子，可偵測時空訊號中，某一物件的移動速度。此一參數為本研究分析波速的重要關鍵。

$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (5)$$

式(3)的  $\psi_{\bar{b}, \tau, \theta; a, c}$  稱為小波函數或小波子函數， $\psi$  則被稱為小波母函數，兩者之間的關係如式(6)所示。

$$\psi_{\bar{b}, \tau, \theta; a, c}(\bar{x}, t) = a^{-3/2} \times \psi(a^{-1} c^{-1/3} r_\theta (\bar{x} - \bar{b}), a^{-1} c^{2/3} (t - \tau)) \quad (6)$$

從式(6)可看出，小波函數為不同  $\tau, \bar{b}, \theta, a, c$  等參數作用的小波母函數所衍生而來。

小波轉換發展至今，許多不同類型的小波母函數已被提出，不同小波母函數的特性及應用範圍皆不盡相同，其中 Morlet 小波母函數已被成功地應用於海洋訊號的分析(Chien et al., 2002)，再加上 Morlet 小波母函數的理論已被發展的頗為成熟，因此本文採用該母函數進行小波轉換。

三維 Morlet 小波母函數於時空域及頻率域(小波母函數經傅立葉轉換後所得之函數，亦即小波母函數於傅立葉空間的表示式)的表示如式(7)與式(8)所示(Mujica, 1999)。

$$\psi(\bar{x}, t) = \begin{bmatrix} e^{i(\bar{k}_0 \cdot A^{-1} \bar{x})} \cdot e^{-0.5|A^{-1} \bar{x}|^2} \\ -e^{-0.5|A^{-1} \bar{x}|^2} \cdot e^{-0.5|\bar{k}_0|^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{i\omega t} \cdot e^{-0.5t^2} \\ -e^{-0.5t^2} \cdot e^{-0.5\omega_0^2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\hat{\psi}(\bar{k}, \omega) = \begin{bmatrix} e^{-0.5|A\bar{k}-\bar{k}_0|^2} - e^{-0.5(A\bar{k}^2 + |\bar{k}_0|^2)} \\ \times \left[ e^{-0.5|\omega-\omega_0|^2} - e^{-0.5(\omega^2 + \omega_0^2)} \right] \end{bmatrix} \quad (8)$$

上式中,  $A = \text{diag}[e^{-0.5}, 1]$ ,  $\varepsilon \geq 1$ , 為 usual anisotropy matrix。參數  $[\bar{k}_0]$  與  $\omega_0$  為小波母函數於傅立葉空間(小波母函數經傅立葉轉換後所得之函數)的中心位置, 也控制著小波母函數的波形震盪程度。

從式(7)及式(8)可看出, 如果參數  $[\bar{k}_0]$  與  $\omega_0$  的值夠大的話, 兩式括號內的第二項都會趨近於零, 亦即上述兩式可簡化如式(9)及式(10)所示。

$$\psi(\bar{x}, t) = \left[ e^{i(\bar{k}_0 A^{-1}\bar{x})} \cdot e^{-0.5|A^{-1}\bar{x}|^2} \right] \cdot \left[ e^{i\omega_0 t} \cdot e^{-0.5t^2} \right] \quad (9)$$

$$\hat{\psi}(\bar{k}, \omega) = \left[ e^{-0.5|A\bar{k}-\bar{k}_0|^2} \right] \left[ e^{-0.5|\omega-\omega_0|^2} \right] \quad (10)$$

由於透過傅立葉轉換的數值技巧(快速傅立葉轉換, FFT)能有效減少譜轉換過程的運算量, 加快運算之速度, 小波轉換的運算可轉換至傅立葉空間進行, 藉此減少運算之時間。小波轉換於傅立葉空間的運算式如式(11)所示。

$$S(\bar{b}, \tau, \theta; a, c) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \times \left\{ \iint \left[ a^{3/2} e^{-i(\bar{k}\bar{b} + \omega\tau)} \times \hat{\psi}^*(ac^{1/3}r_\theta(\bar{k}), ac^{-2/3}\omega) \hat{s}(\bar{k}, \omega) \right] d^2\bar{k}d\omega \right\} \quad (11)$$

## 2.2 小波參數與波速間之關係

式(11)所示為小波轉換分析影像時序列之結果, 透過該式尚無法計算出波場之波速, 需再透過下述之轉換獲得。

由於吾人所分析之影像時序列來自於數位影像訊號, 屬離散型訊號。在進行分析時需考慮到影像時序列訊號之訊號取樣(sampling)特性, 亦即原來的小波函數亦須被離散化。小波轉換因子( $a$  與  $c$ )與波浪參數( $f$  與  $l_x$ )及訊號取樣( $\Delta t$ 、 $N_t$ 、 $\Delta x$  以及  $N_x$ )之間的關係如式(12)及(13)所示。式中的  $T_t$  與  $T_x$  為小波母函數於時間域及空間域的視窗寬度(Jordan and Powers, 1997)。 $\Delta t$  為被分析訊號於時間域的取樣間格;  $\Delta x$  為被分析訊號於空間域的取樣間格。 $N_t$  與  $N_x$  則分別為小波函數離散化後於時間域與空間域的長度, 各自應滿足式(17)與式(18)之關係。

$$ac^{-2/3} = \frac{T_t \omega_0}{\pi \Delta t N_t f} \quad (12)$$

$$ac^{1/3} = \frac{T_x \cdot k_{x0}}{\pi \Delta x N_x l_x} \quad (13)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (14)$$

$$l_x = \frac{k_x}{2\pi} \quad (15)$$

$$\bar{k} = (k_x, k_y) \quad (16)$$

$$[-T_t, T_t] \leftrightarrow [0, N_t \Delta t] \quad (17)$$

$$[-T_x, T_x] \leftrightarrow [0, N_x \Delta x] \quad (18)$$

結合式(12)與(13), 可獲得小波轉換的尺度因子、速度因子與波浪角頻率  $\omega$ 、波數  $k$  之間的關係如式(19)所示。

$$c = \frac{\Delta t \cdot N_t \cdot T_x \cdot k_{x0} \cdot f}{\Delta x \cdot N_x \cdot T_t \cdot \omega_0 \cdot l_x} \quad (19)$$

若上式分子與分母同乘  $2\pi$  可得:

$$c = \frac{\Delta t \cdot N_t \cdot T_x \cdot k_{x0} \cdot \omega}{\Delta x \cdot N_x \cdot T_t \cdot \omega_0} \cdot \frac{\omega}{k_x} = \frac{\Delta t \cdot N_t \cdot T_x \cdot k_{x0}}{\Delta x \cdot N_x \cdot T_t \cdot \omega_0} \cdot v \quad (20)$$

上式中的  $c$  為小波轉換的速度因子, 為無因次單位。 $v$  即為波速, 其單位為 m/sec, 經由轉換後, 可獲得波速如式(21)。

$$v = \frac{\Delta x \cdot N_x \cdot T_t \cdot \omega_0}{\Delta t \cdot N_t \cdot T_x \cdot k_{x0}} \cdot c \quad (21)$$

從式(8)可看出, 當  $\varepsilon = 1$  及  $\bar{k}_0 = (\omega_0, 0)$ , 小波母函數於時間域及空間域的視窗寬度一致, 亦即  $T_t = T_x$ , 則式(21)可簡化為式(22)。

$$v = \frac{\Delta x \cdot N_x \cdot \omega_0}{\Delta t \cdot N_t \cdot k_{x0}} \cdot c \quad (22)$$

上述為透過小波轉換分析波速(wave celerity)的方法。群波速度(wave group speed)的理論值計算, 則透過線性波理論求解, 如式(23)所示, 其中  $d$  為水深; 如透過小波轉換推估群波速度則如式(23a)。

$$C_g = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right) v \quad (23)$$

$$C_g = \frac{E(k_x, k_y)}{E(\omega, \theta)} \cdot k \quad (23a)$$

$E(\omega, \theta)$  是小波轉換能譜對波數積分求得之能量值、 $E(k_x, k_y)$  是從小波轉換能譜對頻率積分後得  $E(k, \theta)$ , 再轉換後所得之尖峰能量。

### 三、波場影像的數值模擬

為瞭解小波轉換應用於波速分析的可行性與其分析結果之準確度，本文應用模擬的波場影像時序列進行驗證。影像時序列模擬的方法敘述如下：

先考慮單純之單一方向規則波場時序列，其數學關係如式(24)所示，其中  $A$  為波場的振幅， $k$  為波數， $\alpha$  為波向， $\omega$  為角頻率， $k$  與  $\omega$  之間的關係則可透過分散關係式求得。

$$\eta(t, x, y) = A \cdot \cos[k \cdot \cos \alpha \cdot x + k \cdot \sin \alpha \cdot y - \omega \cdot t] \quad (24)$$

式(24)所描述的波場為單一方向規則波。由於波浪傳遞至近岸，波浪會發生折射及淺化之現象，此外受到海岸結構物的影響，有可能會有波浪的反射。在特定的相位條件下，入射波與反射波之疊加會造成更險惡的波浪，對海上航行船隻有直接之危害。因此本文亦考慮波浪折射、淺化及入反射波疊加之波場分析。入反射波疊加波場(近岸水動力學, 2003; Horikawa, 1988)的數學式如式(25)~式(28)所示，該式考慮了波浪受水深影響之淺化效應。式(26)中的  $A_0$  為起始(深水)波浪的振幅， $A_i$  為受淺化影響後的振幅， $K_R$  為波浪的反射係數， $K_s$  為波浪之淺化係數， $\varepsilon_i$  為入射波的相位， $\varepsilon_r$  為反射波的相位， $h(x, y)$  為水深。若所分析的案例為漸變床底，水深則隨空間位置  $(x, y)$  改變。波浪的折射現象可透過分散關係式求取不同水深條件下，波浪頻率與波數之間的關係，進而計算得：

$$\eta(t, x, y) = A_i \left\{ \left[ \cos(P + \varepsilon_i) + K_R \cos(P + \varepsilon_i + \varepsilon_r) \right] \cos(\omega t) + \left[ \sin(P + \varepsilon_i) + K_R \sin(P + \varepsilon_i + \varepsilon_r) \right] \sin(\omega t) \right\} \quad (25)$$

$$A_i = A_0 \cdot K_s \quad (26)$$

$$K_s = \left[ \tanh(kh(x, y)) + \frac{kh(x, y)}{\cosh^2(kh(x, y))} \right]^{-0.5} \quad (27)$$

$$P = \int_0^x (k \cdot \cos \theta) dx + k \cdot \sin \theta \cdot y \quad (28)$$

### 四、波場影像分析結果與討論

本文首先以單一規則波場影像序列(案例 A 波場)進行波速分析方法之驗證，單一波場的模擬條件為波高 4m、週期 10sec 與波向 45 度的波浪，模擬之波場如圖 1 所示。

由於小波轉換具有分析波場能譜之能力，本文

先應用小波轉換分析該波場之能譜結果，亦即波浪能量在頻率域與波數域上之聯合分布，藉以確認小波分析結果是否符合波浪之物理特性。如圖 2 所示，為小波轉換分析該波場後所得之波浪能量在角頻率域與波數域上之聯合分布，圖中的曲線為線性波分散關係式所描述波浪角頻率與波數之間的關係。由於所模擬波場之波浪是依據分散關係式而來，因此小波分析結果應該也要與該關係一致。由圖可看出，小波轉換分析所得波場之波數與頻率之能量集中於分散關係式的曲線上，且頻率與波數的尖峰位置亦符合波場之模擬條件，證實小波分析結果確實能表現出波場中波浪的物理特徵。

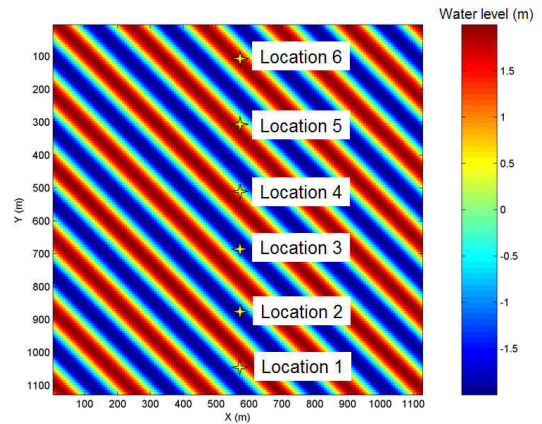


圖 1 單向規則波場(案例 A)之模擬結果

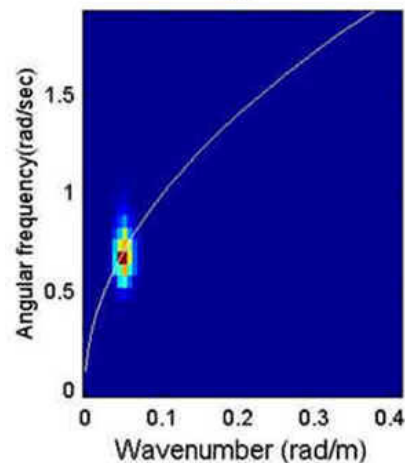


圖 2 案例 A 波場分析結果角頻率與波數之關係

本文進一步應用小波轉換分析案例 A 波場的波向、波速及群波速，結果如圖 3~圖 5 所示。因為

小波轉換具有分析波場時序列中任一時間點及任一空間位置之波浪特性的能力，由於波浪於短時間內可以視為定常，因此本文只選取波場時序列中之時間中點的分析結果作討論；而在波場時序列的空間分佈點則選取圖 1 的 Location1 到 Location6 共 6 個位置點的分析結果作討論。

分析結果顯示，波場中不同位置點的波浪參數分析結果大多與理論值相近。但 Location2 ~ Location5 分析結果的準確度明顯較 Location1 及 Location6 為高，Location2 ~ Location5 的波速及群波速計算結果的無因次誤差皆在 5% 以內。而 Location1 及 Location6 因太過靠近影像的邊界，分析時會受到影像邊界的限制，而影響分析結果的準確度。

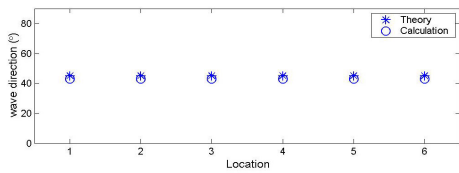


圖 3 應用小波轉換分析案例 A 波場波向之結果

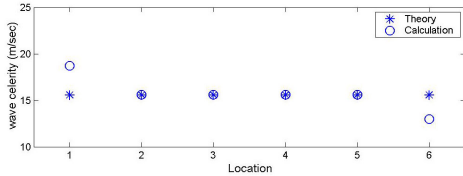


圖 4 應用小波轉換分析案例 A 波場波速之結果

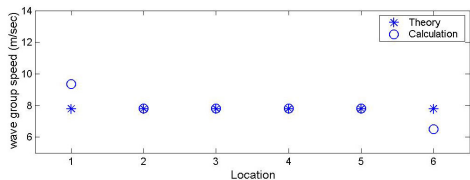


圖 5 應用小波轉換分析案例 A 波場群波速之結果

圖 6 為小波轉換分析訊號之示意圖。由式(3)可看出，小波轉換在數學上為小波函數與影像訊號的 scalar product。如圖 6(a)所示，若用小波轉換分析影像中離邊界較遠處之波浪，即是用一完整之小波函數與訊號進行 scalar product。圖 6(b)則顯示出於影像邊界區域進行分析時，所使用的小波函數受影像邊界之限制，並非一完整之小波函數，因而造成了波浪分析結果的明顯誤差。

本文進一步應用上述之波場模擬方法模擬一

受折射、淺化及反射效應影響之波場時序列(案例 B)。模擬之波浪是由兩成份波疊加所組成，成份波 I 為為波高 3m、週期 10sec 及波向 135 度的波浪；成份波 II 則為波高 1.6m、週期 6sec 及波向 240 度的波浪。亦即該波場為湧浪與風浪所疊加而成。波場之地形由南向北漸淺，另波場的正北面有一結構物阻擋，其反射係數為 0.5，經模擬所得之波場如圖 7 所示。

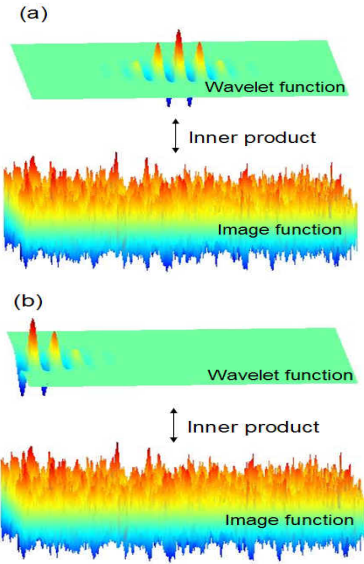


圖 6 小波轉換分析訊號之示意圖

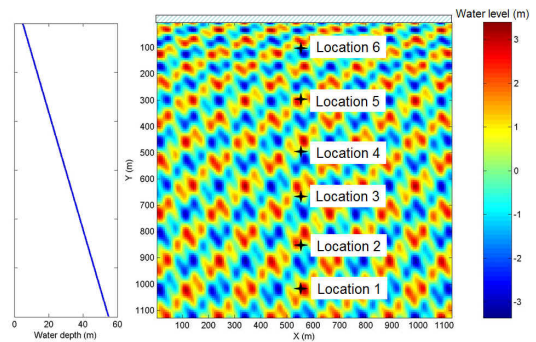


圖 7 具折射、淺化及反射效應之規則波場(案例 B) 模擬結果

經小波轉換計算所得波向結果如圖 8 所示，從兩成份波的波向計算值確實可看出波浪折射之現象，且兩反射波向之計算結果亦與理論值相近。

小波轉換計算所得波速與群波速之結果如圖 9 及圖 10 所示。結果顯示，波速與群波速計算值與理論值相近，而於接近波場邊界位置之分析結果的

準確度依然不如波場其它位置分析結果的準確度高。波場中 Location2 ~ Location5 的波速及群波速計算結果的無因次誤差皆在 10% 以內。除了影像邊界之影響外，波場影像序列的時間及空間解析度也會影響到計算結果的準確度。後續研究如欲提昇波速計算結果的準確度，可先討論應用此法分析影像序列所需之解析度。

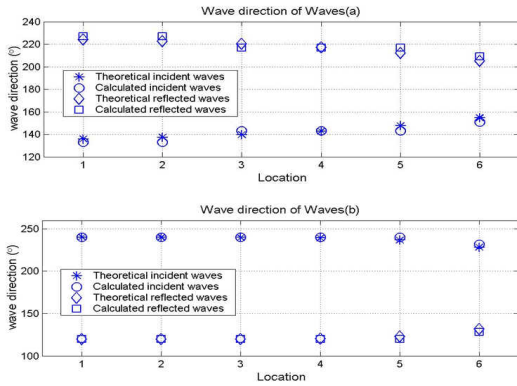


圖 8 應用小波轉換分析案例 B 波場波向之結果

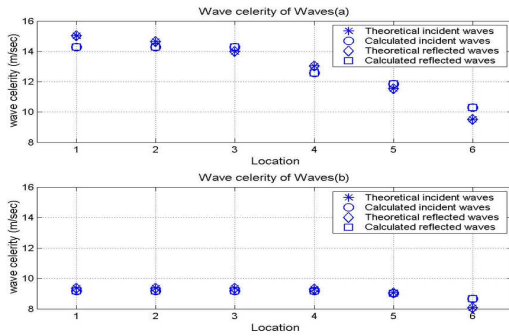


圖 9 應用小波轉換分析案例 B 波場波速之結果

## 五、結論

海浪的波速與群波速度是海洋科學研究及海洋工程應用所需考慮的重要因子。本文探討含速度轉換因子的小波轉換應用於波場影像序列分析的可行性，並將研究重點先聚焦在波速與群波速計算結果準確性的討論。

經分析單向規則波場(案例 A)及綜合波浪折射、淺化、反射等效應所形成之波場(案例 B)後發現，應用小波轉換的速度轉換因子確實能有效計算出波速及群波速度。從小波轉換分析結果發現，分析結果的準確度會受到被分析影像訊號的邊界所影響，離影像邊界較遠區域的波速及群波速度分析

結果，其準確度會較高，其無因次誤差皆在 10% 以內。

除影像邊界之影響外，波場影像序列的(時間及空間)解析度也會影響到計算結果的準確度。後續可透過增加被分析影像序列之解析度，再提昇波速計算之準確度。

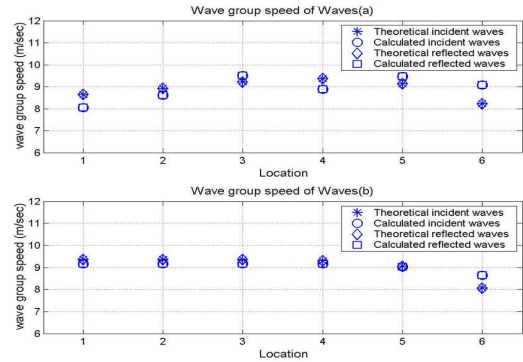


圖 10 應用小波轉換分析案例 B 波場群波速之結果

## 參考文獻

1. 許泰文 (2003) 「近岸水動力學」，科技圖書。
2. Antoine, J.-P., Murenzi, R., Vandergheynst, P. and Twareque, Ali, S. (2004) *Two-Dimensional Wavelets and their Relatives*, Cambridge university press, United Kingdom.
3. Chien, H., Kao, C.C. and Chuang, Z.H.L. (2002) "On the Characteristics of Observed Coastal Freak Waves," *Coastal Engineering Journal*, Vol. 44, pp. 301-319.
4. Horikawa, Kiyoshi (1988) *Nearshore dynamics and coastal processes: theory, measurement, and predictive models*, University of Tokyo Press.
5. Jordan, D., Miksad, R.W. and Powers, E.J. (1997) "Implementation of the continuous wavelet transform for digital time series analysis," *Rev. Sci. Instrum.*, Vol. 68, pp. 1484-1494.
6. Mujica, F.A. (1999) *Spatio-temporal continuous wavelet transform for motion estimation*, Dissertations of School of Electrical and Computer Engineering, Georgia Institute of Technology.
7. Reeve, D., Chadwick, A. and Fleming, C. (2004) *Coastal Engineering Processes, Theory and Design Practice*, Spon Press, New York.