

應用岸基測波雷達於方向波譜觀測之研究

吳立中¹ 董東璟¹ 錢樺¹ 高家俊²

摘要

波浪運動受到氣象、水文、海洋、地形等因素影響，是極端紛紜的自然現象之一，波浪研究無法靠試驗或理論就能完全求解，現場觀測是瞭解波浪現象必要的方式。遙測可以觀測廣大的海面現象，其中微波雷達由於可以穿透雲雨，並具有日夜從事觀測作業的能力，是相當有潛力的波浪觀測儀器。由於許多波浪參數是藉由波譜推算所得，本文目的要從雷達影像中分析出合理的影像譜資訊，作為日後計算波浪參數的依據。由於雷達影像通常位於近岸非均勻海域，為了分析非均勻的影像，本文重點在發展一個非均勻影像譜分析方法(Non-homogeneous image spectrum analysis method)，此方法是基於二維小波轉換所導出，經由分析模擬的影像的測試研究中，驗證了它在計算非均勻影像譜上比傳統傅立葉方法具有更高的解析度，本文最後將此法應用到實際雷達影像的譜分析，證實本文推導發展方法是可以正確計算出非均勻影像譜。

Application of Nautical Radar to directional wave spectrum measurement

Lee-Chung Wu Dong-Jiing Doong Hwa Chien Chia Chuen Kao

ABSTRACT

Ocean waves feature extremely random and are directly and indirectly dependent on meteorological, hydrological, oceanographic and topographical factors. They cannot be fully understood only by theoretical approaches or laboratory experiments. Field measurements must be performed to increase the knowledge of waves. Remote sensing techniques have become quite popular for ocean wave measurement applications. Microwave RADAR that can provide all weather monitoring during day and night and is less affected by cloud and rain is now the most popular sensor of remote sensing techniques among others. This paper aims to extract the image spectrum from X-band marine radar images. In order to analyze the nearshore non-homogeneous radar images, a non-homogeneous image spectrum analysis algorithm is developed in this study. This presented algorithm is derived based on the two-dimensional Wavelet transform. It is validated its performances by testing simulation images. Several relative problems of using this algorithm are discussed. This method is finally applied to extract the image spectrum of field radar images. The derived wave parameters are validated by the nearby in-situ measurements.

¹ 國立成功大學水利及海洋工程所博士班研究生

² 國立成功大學水利及海洋工程所教授

一、緒論

海洋占據了地球表面大部份面積，蘊含豐富的資源，不論是海上的活動或是海岸的發展，均面臨到巨大的風、波、流等海洋環境外力，其中波浪之特性極端紛紜且難以捉摸，由理論、試驗或模式難以完全掌握波浪，現場觀測是了解波浪的必要途徑。

波浪的觀測方法可分為現場(in-situ)直接觀測及間接的遙感探測(remote sensing)兩種，其中遙感探測為不和目標直接接觸，對觀測目標進行影像之攝取來分析觀測區域之特性。由於遙測可觀測廣大海面的變化，對於探討波浪空間變化特性，如：波浪折繞射演變、碎波帶分佈及颱風波浪分佈等特性皆可提供有用的資料作為研究分析之用。此外，由於遙測儀器無須直接放置於海面上仍可進行觀測，可避免儀器受海洋外力之影響，具有較容易維修的優點。

目前波浪遙測常使用雷達(Radar)來探測海面狀況[Nieto, et al.,1999、Nieto, et al.,2000、Reichert, et al.,1998]，主動式雷達藉由發射與接收電磁波而得知海面的粗糙度情形，而回波是由鏡面反射及布拉格繞射兩種物理機制所造成。

目前常見之雷達觀測技術合成孔徑雷達(Synthetic Aperture Radar,簡稱 SAR)、高頻雷達以及航海用雷達。其中航海雷達原是用於偵測海上船隻及障礙物。經研究顯示，從雷達回波資訊當中不但可偵測障礙物，更能反映出海面波浪之變化。若將雷達固定架設於岸邊(稱為岸基雷達)，可持續觀測大範圍空間面上的波浪變化，是相當有潛力的波浪觀測儀器。

由於許多波浪參數，諸如：波浪之波高、週期、波長、波向..等，可以藉由波譜推算所得，從前人之研究中(Young et al.,1985)發現波譜可藉由影像譜經分散方程的關係求得。為能由雷達觀測獲得精準之海象觀測資訊，本文要從雷達影像中分析出合理的影像譜資訊，作為日後計算波浪參數的依據。

由於岸基雷達所觀測區域通常屬於近岸非均勻海域，為了分析非均勻的影像，本文在下一章探討不同種類之訊號分析方法，並從中發展一個非均勻影像譜分析方法(Non-homogeneous image spectrum analysis method)作為雷達影像譜分析之用。

二、譜分析理論

為尋找一個合適的影像分析工具，本文在此探討傅立葉轉換、窗選傅立葉以及小波轉換等三種被廣為使用的訊號分析方法，並從中找出一適合的分析工具。

2.1 傅立葉轉換

傅立葉轉換是目前最常被用來分析訊號的工具之一，其數學表示如式(1)所示：

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \exp(-i2\pi ft) dt \quad (1)$$

藉由將訊號時序列[$f(t)$]進行傅立葉轉換可獲得其訊號頻譜之特性。然而經傅立葉轉換所獲得之頻譜表現的是各頻率之平均值，不能反映局部時間之頻譜訊息，因此該法適用於定常性訊號之分析。

2.2 短時傅立葉轉換

為了能使傅立葉轉換兼具分析訊號之時域以及頻率域之能力，Gabor 提出窗選傅立葉轉換(Short Time Fourier Transform)的構想。其數學表示如式(2)所示：

$$STFT(\mathbf{t}, f) = \int_t [f(t)w^*(t-\mathbf{t})] \exp(-i2\pi ft) dt \quad (2)$$

上式中 w 稱為視窗函數，*代表數學式之共軛複數， \mathbf{t} 為平移函數。相較於傅立葉轉換，窗選傅立葉轉換的視窗寬度為一有限且固定的寬度，若以此寬度分析高頻訊號，將造成視窗內包含過多波浪資訊，無法精確掌握時域之局部特性。反之，若以此固定之視窗寬度分析低頻訊號，則視窗內包含之波浪資訊不足，而無法萃取訊號頻率域之局部特性。

為能解決前文所提之訊號分析方法在時頻解析上所碰到的難題，本文採用了訊號分析領域中，另一新興理論-小波轉換做為訊號分析之工具。

2.3 小波轉換

2.3.1 一維小波轉換

小波轉換是處理非定常性訊號的一種方法，其特點是可解析出訊號時序列中各時間域上之能譜密度以及各頻率域之能量在時間上的分佈。

小波轉換之分析原理乃是藉由小波母函數與被分析訊號進行積分計算。藉由小波母函數波形的尺

度伸縮以及位置移動來分析訊號不同時間下之頻率特性(Mallat, 1998)。其數學表示式如式(3)所示：

$$WT(a,b)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot y_{ab}^*(t)dt \quad (3)$$

上式中函數 $y_{ab}^*(t)$ 為小波母函數經位移動及尺度調變後之函數(稱為小波函數)，*代表函數之共軛複數， a 為尺度參數，控制小波母函數波形的頻率以及分析訊號的視窗大小， b 為位移動參數控制小波母函數的位置。

雖然窗選傅立葉與小波轉換皆可解析出訊號之時頻特性，然而窗選傅立葉所使用之視窗函數結構是固定的，因此無法在時間域及頻率域同時有良好的解析度。而小波轉換之視窗函數具有調變特性，分析訊號時，其視窗寬度會隨訊號頻率之不同而隨之變化，適合分析非正常性訊號。

2.3.2 二維小波轉換

基於前文所探討之小波轉換分析訊號之優點，本文採用該理論作為雷達影像之分析工具。由於雷達影像屬於二維度之空間訊號，為能從影像中萃取出譜的資訊，必須將小波轉換應用到二維度的影像分析。

為能使小波轉換描述影像中方向之特性(例如：海面波浪之波向)，除了尺度參數以及位置參數之外，還必須將小波母函數之方向特性導入到二維小波轉換理論中(Antoine,1996)。同時考慮尺度、位置及旋轉三個參數的小波轉換關係式如式(4)所示：

$$S(a,\bar{b},q)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\cdot y_{a,\bar{b},q}^*(x,y)dx dy \quad (4)$$

其中 $y_{a,\bar{b},q}^*(x,y)$ 為經由位置移動、尺度伸縮以及角度旋轉後的小波母函數(式中的*代表函數之共軛複數)，其數學式如式(5)所示：

$$y_{a,\bar{b},q}(x,y)=\frac{1}{a}y\left(a^{-1}r_q(\bar{x}-\bar{b})\right) \quad (5)$$

上式中 $\bar{b}=(b_x,b_y)$ 表示小波母函數在二維空間中 x 方向與 y 方向的位置， a 代表小波母函數的擴張或伸縮， q 為小波母函數所旋轉的角度。綜整參數 a 與 q 成為一具有方向性的尺度參數 $\bar{A}=(A_x,A_y)$ ，其中：

$$A_x=a\cos q \quad (6)$$

$$A_y=a\sin q \quad (7)$$

其中 A_x 代表小波母函數在 x 方向的伸縮，同理， A_y 代表小波母函數在 y 方向的伸縮。因此可將二維小波轉換式及小波函數可改寫為式(8)及式(9)：

$$S(\bar{A},\bar{b})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\cdot y_{\bar{A},\bar{b}}^*(x,y)dx dy \quad (8)$$

$$y_{\bar{A},\bar{b}}(x,y)=\frac{1}{|\bar{A}|}y\left[\bar{A}^{-1}(x-b_x,y-b_y)\right] \quad (9)$$

如前文所述，二維小波轉換是利用尺度伸縮以及位移動後的小波母函數與二維影像訊號進行內積。然而小波母函數之型式並非唯一，不同小波母函數各自有其獨特之性質，在應用小波轉換時，都須面臨一問題：如何去選擇一適合的小波母函數。許多小波母函數的提出通常是用來針對特定的問題。當被分析之影像無須考慮其方向之特性，等向小波母函數(例如：二維墨西哥帽小波母函數)即可滿足其需求。但是當影像中的方向資訊需要確切被量測出(例如：海面波浪之波向)，方向小波母函數(oriented wavelet)就需要被提出。本文採用具有方向性之 Morlet 小波母函數作為分析之用，其數學式如式(10)所示，式中 \bar{n}_0 為母函數之波形震盪個數。

$$y(\bar{x})=e^{i\bar{n}_0\cdot\bar{x}}\cdot e^{-\frac{1}{2}|\bar{n}_0|^2} \quad (10)$$

三、小波轉換參數與波浪特性關係的推導

小波轉換分析所得小波係數與尺度及位移動參數的關係，與波浪參數間無直接關聯。為能將小波轉換結果與波浪特性結合，本章在此探討小波係數與波浪之間的關係。

3.1 小波尺度參數與波浪波數(波長)之關係

二維小波轉換中的尺度函數(\bar{A})與波數(\bar{k})之間的關係如(11)式所示。式中 \bar{k}^* 為變形後小波頻率域函數定義域內的任意位置， $y(\bar{k}^*)$ 為其對應的函數值。由式(11)發現尺度參數與成分波波數之間是反比關係，當分析影像中的波數比較小時(成分波波長大)，尺度參數會增大以拉長小波函數使獲得足夠的波浪訊息進行分析。

$$\bar{k} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \bar{k}^* \cdot |\hat{y}(\bar{k}^*)|^2 d\bar{k}^* \right] / \left[\bar{A} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{y}(\bar{k}^*)|^2 d\bar{k}^* \right] \quad (11)$$

3.2 頻率解析力

小波轉換連續地分析訊號中的每一段，此分析段落長度並非固定不變，利用二維小波轉換分析影像時，在空間以及頻率域的解析度，即所謂的視窗寬度。二維小波轉換的頻率視窗寬度 $\bar{D}_k = (D_{kx}, D_{ky})$ 如式(12)所示，從該式得知頻率視窗寬度是隨著所分析波場影像中成份波的波數增大而變大的。

$$\bar{D}_k = 2 \cdot \bar{k} \cdot \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{k}' \cdot |\hat{y}(\bar{k}')|^2 d\bar{k}'}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{y}(\bar{k}')|^2 d\bar{k}'} \right]^{-1} \times \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\bar{k}' - \bar{k})^2 \cdot |\hat{y}(\bar{k}')|^2 d\bar{k}'}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{y}(\bar{k}')|^2 d\bar{k}'} \right]^{0.5} \quad (12)$$

3.3 小波位移參數與分析波場所處位置之關係

除了尺度參數在頻率空間所代表的意義外，位移參數則是與分析點的空間位置有關。二維小波轉換後位移參數與空間位置的關係如式(13)所示：

$$\bar{x} = \bar{b} + \left\{ \bar{A} \cdot \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}^* \cdot |\hat{y}(\bar{x}^*)|^2 d\bar{x}^*}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{y}(\bar{x}^*)|^2 d\bar{x}^*} \right] \right\} \quad (13)$$

3.4 空間解析力

空間視窗寬度與成份波波數之間的關係如(14)式所示(吳, 2002)。該式說明了空間視窗大小與成分波波數為反比關係，當被分析波場影像中波數較少時，所分析的空間視窗寬度必須增大，以使小波轉換有合理的結果。

$$\bar{D}_x = \frac{2}{\bar{k}} \cdot \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{k}' \cdot |\hat{y}(\bar{k}')|^2 d\bar{k}'}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{y}(\bar{k}')|^2 d\bar{k}'} \right] \times \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\bar{x}' - \bar{x})^2 \cdot |\hat{y}(\bar{x}')|^2 d\bar{x}'}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{y}(\bar{x}')|^2 d\bar{x}'} \right]^{0.5} \quad (14)$$

四、小波影像譜分析應用時之問題討論

4.1 小波視窗寬度之調變特性

傅立葉轉換分析全域的影像特徵，獲得一個平均波譜，小波轉換則藉由解析視窗的調變特性萃取

影像的局部特徵，由前文得知小波轉換在空間與頻率的解析視窗寬度是與影像成份波的波數(波長的倒數)有關的，若解析視窗固定不變，當影像中有較長的成份波，固定視窗內的波數(number of wave)不足，造成分析結果不合理；當視窗內的成分波較短，導致視窗所包含的波數較多時，視窗內的波場有可能因此是不均勻的，因此影像譜分析的視窗大小決定是影響分析結果的一個重要因素。本文將小波視窗與波長的關係繪於圖 1，得知當影像中包含了波長較長的成份波時，空間解析視窗會增大以獲得足夠的波形訊息供譜分析，但頻率的解析視窗會因而減小，使得在空間與頻率的解析度上取得平衡，反之亦然，這是小波轉換具有的獨特特性，也是計算高解析度影像譜的基礎。

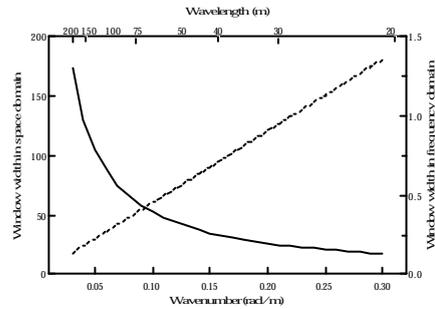


圖 1 小波視窗寬度與波長之關係

4.2 影像譜分析受邊界之影響

當從事影像譜分析時，可能遭遇到分析視窗內包含了部分的非波浪資料(如陸地或超過影像邊界外的區域)，本節探討應用小波轉換分析影像譜時，可分析範圍與影像或陸地邊界的距離限制。

本文模擬一個影像，如圖 2 所示，影像右側是主波向 135 度的不規則波影像，影像左側假設為陸地。事實上，本文是模擬一個與右側差異很大(主波向 225 度)的波場影像並將其置放於陸地區域，這是為了方便探討小波轉換譜分析受邊界影響所作的設定。計算在右側影像處與邊界不同距離的波譜後發現邊界附近的分析結果受到了陸地影響的程度隨著與邊界的距離增加而減小。本文以影像譜中，在海上與陸地的成分波能量比值作為評斷小波轉換分析受邊界影響之程度，當比值愈小時，表示影像譜受邊界或陸地之影響愈小。分析結果如圖 3 所示，當離開影像(或陸地)邊界約 1.0 倍波長時，海面區域所

求得的影像譜受陸地的影響僅剩 10%，此距離視為影像譜計算不受到邊界或陸地影響的最小距離，這說明小波轉換雖已被本文證實具有分析近岸非均勻波場影像的能力，但它的可分析範圍仍僅限於一倍的波長以外，以一般波浪條件而言，大約在離岸 100 公尺外使用小波轉換分析才不會獲得失真的結果。

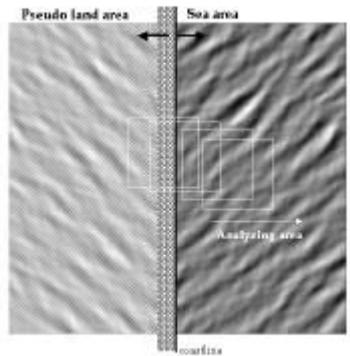


圖 2 為探討邊界影響所模擬之影像

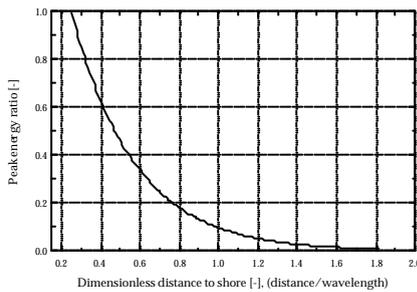


圖 3 影像邊界對小波轉換分析結果之影響程度

4.3 母函數波形震盪個數之探討

小波函數的波形震盪個數，代表小波函數“波”的數目。從事波場影像譜分析時，若波形震盪個數選取的太小，小波轉換無法解析出波數相近之成份波，亦即頻率(波數)解析力變差；當波形震盪個數較大時，雖然提高了頻率的解析力，但卻降低了空間解析力，也就是說辨別空間中距離相近之目標物之能力變差。因此，波形震盪個數是決定能否合理分析出影像特徵重要的因素之一，本節研究從事波場影像譜分析時適當波形震盪個數的決定。

本文模擬兩個條件接近的波源所形成的波場影像。本文模擬的點波源其中一個成份波的波長設定為 60m，另一個點波源的波長設定為 69m。

圖 4(a)是使用較小的波形震盪個數所分析之結果，從圖中無法分辨出本文所設定的兩個成份波，圖 4(b)則是較大波形震盪個數的分析結果，可得到

與輸入條件相同的成份波。本文使用兩個成份波能譜尖峰值的比值做為是否可分辨出不同成份波的判斷指標，比值愈小時，表示不同的成份波愈容易被分辨出來。分析結果如圖 5 所示，當波形震盪個數大於 5 的時候，這個能量比值小於 0.8，被視為是能分辨出不同成份波的最小波形震盪個數。

雖然波形震盪個數的增加提高了頻率的解析力，但相對卻降低了空間的解析力。隨著波形震盪個數值的增加，影像譜中的波向就愈分散，就愈難求得主波向，圖 5 中同時也繪製了空間中的波向解析程度與波形震盪個數的關係，這裡的波向解析程度是以波向的變異數來作指標。當波形震盪個數介於 3~10 之間時的波向計算結果最集中，不確定程度最小。為了兼顧小波轉換在分析影像譜時的頻率與空間解析力，本文建議可以使用 $n_0 = 5$ 來從事一般的影像譜分析。

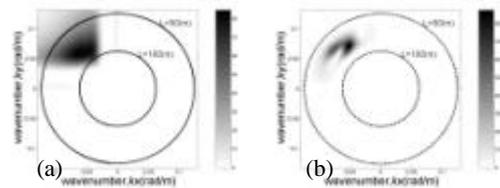


圖 4 不同 n_0 下之小波轉換分析結果

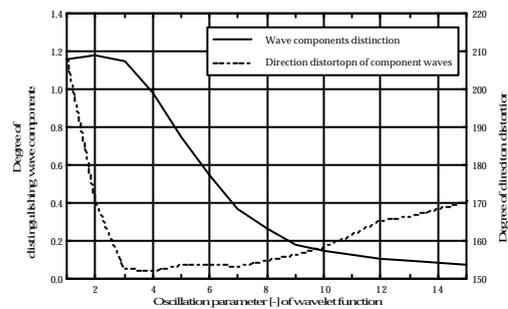


圖 5 不同 n_0 下，波譜頻率與波向之辨識率

五、以數值模擬影像驗證本文方法

本節以數值模擬影像的波譜來驗證二維小波轉換理論是否適用於影像譜之分析。為了瞭解二維小波轉換分析的效果，本文同時以傅立葉轉換的分析結果來做為比較對象。

5.1 均勻影像的驗證

均勻影像的分析結果顯示二維小波轉換與傅立

葉轉換得到相同的影像譜，驗證了小波轉換在分析均勻規則波場影像時是沒有問題的。在分析的結果中發現了傅立葉轉換的頻率解析度高於小波轉換，這點則是因為小波轉換為顧及在頻率與空間解析度的平衡所造成的(吳, 2002)。

5.2 非均勻影像的驗證

5.2.1 局部非均勻影像

為了驗證小波轉換在分析非均勻影像的效果，本文模擬一幅由四組不同波向的規則波所組成的影像，如圖 6 所示。在各個象限內的成分波是均勻的規則波，在象限交界處或整幅影像則是非均勻的。由傅立葉轉換來分析這個影像，所得到的是整個影像的平均譜，如圖 7，從傅立葉譜然發現了與模擬條件吻合的四個成分波，然而卻無法辨別出各成分波分別是由哪一個區域之波場所造成的。

當使用小波轉換分析同樣一幅影像時，由於小波轉換所具有的局部萃取特性，可以被使用來分析影像中各處的波譜性質，如圖 6 中 B 處的波譜繪於圖 8，所得到的正是 B 點所在處(第一象限模擬波場)的設定值。此一結果證實了小波轉換在均勻影像有正確的譜分析結果，在非均勻影像也有合理的分析結果，是一個在擷取局部譜訊息相當有用的工具。

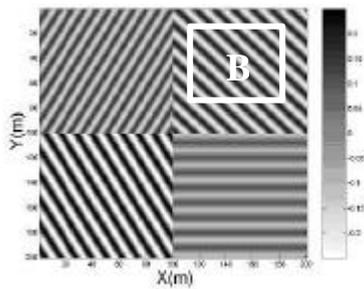


圖 6 本文所模擬之局部非均勻波場影像

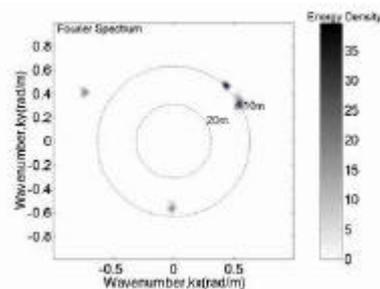


圖 7 傅立葉轉換分析圖 6 影像之結果

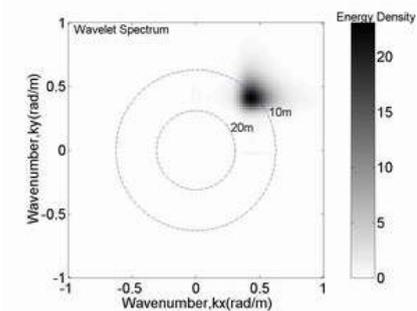


圖 8 小波轉換分析圖 6 影像之結果

5.2.2 非均勻不規則波影像

波浪是極端紛紜的，除了實驗室所造之波形比較接近規則波之外，真實的波浪是呈現不規則的型態。為能要探討小波轉換應用於分析不規則波場影像之效果，本文利用 Goda and Mizusawa (1995)所提出紛紜波場模擬方法，模擬結果如圖 9 所示。

利用傅立葉轉換與小波轉換對圖 9 影像中 C 處進行譜分析的結果如圖 10 與圖 11，小波波譜所得的主波向與模擬條件之間的誤差小於 3 度，主頻之誤差小於 0.05。說明了本文所建立之方法亦適用於分析非均勻不規則波影像。

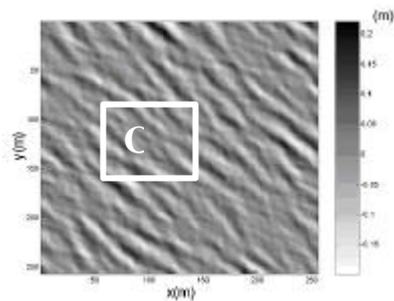


圖 9 不規則波場影像

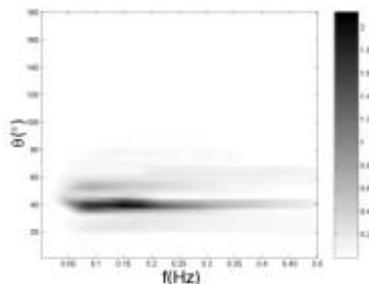


圖 10 傅立葉轉換分析圖 9 影像之結果

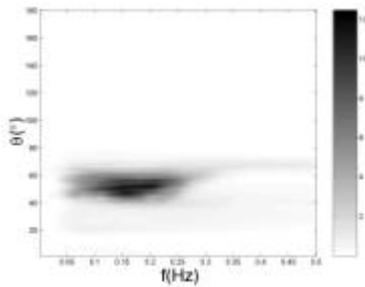


圖 11 小波轉換分析圖 9 影像之結果

5.2.3 非均勻點波源影像

除了規則波與不規則波場之外，自然界還存在著一些比較特殊之波場，如受點外力作用而生成的點波源波場。這個由單點或數個點外力所造成的波場符合波浪特性(至少波向)在空間上變化不均勻的特性，是一種非均勻的波場影像。點波源波場影像的模擬式如式(15)，其中 n 值是控制波浪衰減程度的參數。本文模擬兩個來源的波場，波高均是 1.0m，波長分別是 3.0m 與 6.0m，模擬的影像如圖 12 所示。

$$f(x, y) = \sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) / \left(x^2 + y^2\right)^n \quad (15)$$

利用傅立葉轉換分析點波源影像時可以正確地計算出成分波波長，如圖 13，波數譜的主能量發生在波長 3m 與 6m 處，符合給定之模擬條件。但傅立葉轉換求得的波向並非源自於“點”，而是從一段約 75 度的範圍所傳來。利用小波轉換分析相同的影像，不但求得正確的成分波波長，也精確地計算出成分波的來源，如圖 14 所示，我們可以從這個例子的分析結果再度確認了應用小波轉換於分析非均勻影像時是比傅立葉轉換更有成效的。

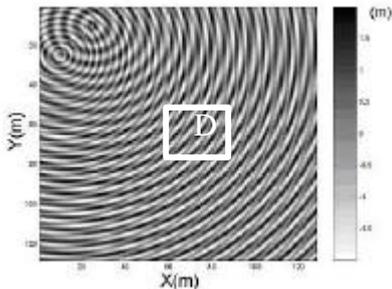


圖 12 點波源波場影像

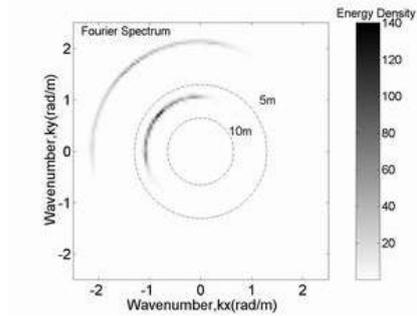


圖 13 傅立葉轉換分析圖 12 影像之結果

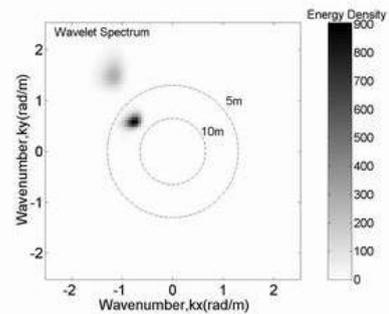


圖 14 小波轉換分析圖 12 影像之結果

六、實測雷達影像譜分析

經由模擬波場驗證小波轉換分析影像譜之方法正確無誤後，本文將本法應用在實測雷達影像的譜分析。所分析的雷達影像資料是成功大學近海水文中心利用 X-band 雷達在台南安平海域所觀測之雷達影像，如圖 15 所示，所選用來分析的子影像大小為 128×128 像元。藉由二維小波轉換對雷達子影像進行分析後所萃取之波譜如圖 16。分析結果顯示該海域之主波長為 126 公尺，主波向為 231 度。分析結果與同一時刻鄰近的七股觀測樁實測波浪資料進行比對發現兩者之波長誤差約為 13 公尺，波向誤差在 10 度以內，說明了這個影像譜分析方法的正確性。

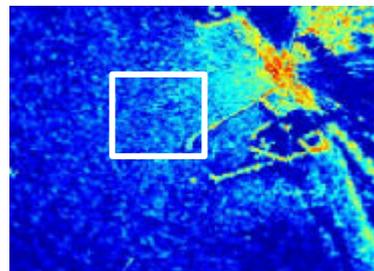


圖 15 台南安平海域所觀測之雷達影像

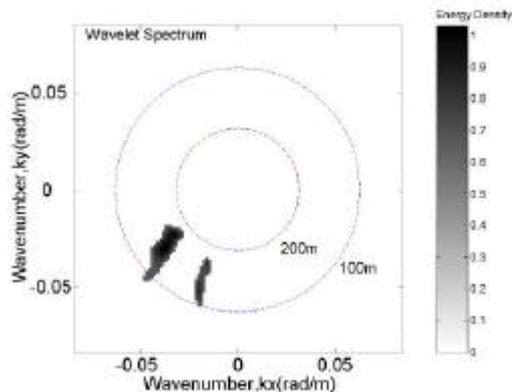


圖 16 小波轉換分析圖 15 之雷達影像譜結果

七、結論與建議

由原本航海用的雷達影像萃取波浪訊息是相當有潛力的測波方法之一，為了建立雷達測波系統，必須在硬體與軟體分別發展，本文以二維小波轉換為基礎，發展一個從雷達影像萃取波譜訊息的方法，從推導的過程、應用時遭遇的困難、方法的驗證以及最後實測影像的應用，獲得以下幾點結論：

1. 由推導的過程得知，小波轉換的解析視窗大小與波數呈反比，與波長呈正比，也就是說，當分析影像內涵蓋較長波浪時，視窗自動放大，反之則縮小，這個視窗具有自動調變的特性。
2. 在應用小波轉換分析影像譜時，為兼顧波數與波向解析度，小波母函數的波形震盪個數應選取在 3~10 之間。同時，為了避免陸地邊界的影響，影像分析範圍至少應距離陸地邊界一個波長以上，分析區域太靠近岸邊會獲得不合理的影像譜計算結果。
3. 經由模擬影像的分析發現，本文方法在分析均勻波場之結果與傳統傅立葉譜分析結果相同，分析非均勻影像時則，小波轉換仍然計算得到合理的結果，傅立葉方法有時會有不合理的結果產生。
4. 分析實測雷達影像發現，波長誤差為 13m，波向誤差在 10 度以內，這個誤差在合理的範圍內。經由本文的研究說明了這個測波方式的可行性，當然在本文發展的方法上以及雷達系統硬體方面都還是具有改善空間的。

參考文獻

1. 吳立中(2002)，“二維小波轉換應用於波場影像分析之研究”，*國立成功大學碩士論文*，台南。
2. Antoine J. P. and R. Murenzi(1996)，“Two-dimensional directional wavelets and the scale-angle representation,” *Signal Processing*, Vol.52, pp. 259-281.
3. Goda, Y. and T. Mizusawa (1995)，“Spatial and temporal fluctuations of nearshore currents induced by directional random waves,” *Proc. Coastal Dynamics '95*, pp. 269-280, ASCE.
4. Mallat, S. (1998)，“A Wavelet Tour of Signal Processing,” *Academic Press*, ISBN 0-12-466605-1.
5. Nieto, J.C., Reichert, K., Dittmer, J., 1999. Use of nautical radar as a wave monitoring instrument. *Coastal Engineering* 37, 331-342.
6. Nieto, J.C., Soares, C.G. (2000), Analysis of directional wave fields using X-band Navigation radar. *Coastal Engineering* 40, 375-391.
7. Reichert, K, Nieto, J.C., Dittmer, J. (1998), WaMoS II: An operational Wave Monitoring System”, *Proceedings of Oceanology International*, Brighton.
8. Young, I.R., Rosenthal, W., Ziemer, F. (1985), A three-dimensional analysis of marine radar images for the determination of ocean wave directionality and surface currents. *J. Geophys. Res.* 90, 1049-1059.