第 23 屆海洋工程研討會論文集　國立成功大學　民國 90 年 12 月
Proceedings of the 23rd Ocean Engineering Conference in Taiwan, Republic of China
National Cheng Kung University　December, 2001

二維小波轉換分析波場影像

吳立中[1]　董東璟[2]　莊士賢[3]　高家俊[4]

摘要

遙測爲從事海洋科學研究的重要方法之一，高解析度的影像分析理論可以從影像中擷取到有用的資訊，爲了日後應用於分析近岸非統一性波場的遙測影像資料，本文採用小波轉換來從事影像萃取分析。本文著重於理論的推導，以一維小波轉換爲基礎，推導二維轉換後尺度和位移參數與波數及空間位置之間的關係，並試圖推演小波係數與波浪能量的關係。本文經由分析模擬波場的影像證實，二維小波轉換具有分析空間中不同位置的波場訊息與探討特定成分波在空間中演變的能力。

A Derivative Study 2D Wavelet Transform for Wave Field Images Analysis

Lee-Chung Wu　Dong-Jiing Doong　Laurence Zsu Hsin Chuang　Chia Chuen Kao

ABSTRACT

Remote sensing has been proven a useful tool to physical oceanographers on studying the ocean. Many important information implied in the remote sensing images could be extracted by image analysis tool. However, in coastal area the water depth gradually changes, so the traditional Fourier Transform couldn't correctly describe the wave field. It is then the purpose of this study to prove the feasibility of applying 2D Wavelet Transform to analyzing coastal wave field images. To justify the accuracy of this method, we compared the analyzed results of simulated images with input conditions. It was shown that 2D Wavelet Transform is a better tool than Fourier Transform on analyzing the changeable wave field in coastal ocean.

一、緒論

波浪是損害海岸結構物與影響海域活動安全的重要因素之一，由於波浪受到氣象環境、海流狀況…等各種因素直接或間接的影響，是一種極端紛紜的自然現象，除了理論解析與實驗分析外，波浪觀測提供分析波浪的另一種途徑。波浪觀測分爲現場(in-situ)觀測與遙感探測(remote sensing)兩種方式，現場觀測提供直接準確的資料供模式驗證、即時數值預報…之用，爲了獲得空間上的波場資訊與探討波浪在空間中的演變，遙測是一種可能的途徑，具有經濟易維修的優點。

由於微波波段的雷達感測器不受雲雨干擾，可在白天與沒有陽光的夜晚進行觀測，被廣泛地應用於從事海洋觀測作業。根據雷達的運作原理，可分

1.成大水利及海洋工程學系碩士班研究生
2.成大水利及海洋工程學系博士班研究生
3.成大近海水文中心副主任
4.成大水利及海洋工程學系主任

爲真實孔徑雷達(Real Aperture Radar, RAR)與合成孔徑雷達(Synthetic Aperture Radar, SAR)兩類，真實孔徑雷達常架設於岸邊固定點探測海面波浪，經由鏡面反射以及布拉格(Bragg)共振的訊號得到回波，用以分析海面的波浪特性，裝載於飛機與衛星上的感測器則多屬於合成孔徑雷達。

不論真實孔徑或合成孔徑雷達的觀測結果均爲描述空間波場的相片，前人研究中大多擷取一塊子影像區域，分析代表該影像區域的特徵波場。但在分析波場訊號時，有時不僅需要知道不同成分波之能量分佈，亦需要了解各成分波相對應在空間中不同位置之變化情形，爲了將波浪訊號的能量同時表現在空間以及成分波之分佈上，本文嘗試利用"小波轉換"的理論來分析波場。藉以探討各成分波能量於空間中之變化情形。

小波轉換於分析一維時序列訊號可將時序列的能量同時表現在時間一頻率域上。應用於分析波浪方面，可探討出波浪能量於時域及頻率域上的變化情形，更可藉由小波轉換得到某一瞬時波浪能量，或是各頻率成分波能量在時間上的變化，以分析非定常性波浪資料。

小波轉換(wavelet transform)除應用於分析波浪時序列，以探討出波浪能量於時域及頻率域上的變化情形，亦可利用二維小波轉換分析空間訊號，將影像中所包含的波浪訊息萃取至位置空間及成分波空間。亦即可以探討空間中不同位置點之成分波的分佈，也可以用來探討不同成分波在空間中的變化情形。

本文的研究目的在於二維小波轉換上的推導，推導出小波轉換之參數與波譜之關係，及小波轉換之影像解析力(視窗寬度)，並以模擬影像與實際雷達影像來測試本文的數學程序，作爲下一步探討波浪在空間影像中的演變特性的基礎。

二、小波轉換理論

2.1 二維小波轉換

二維小波轉換是延續著一維小波轉換所發展出來的，其原理與一維小波轉換相類似，基本涵義爲：將某二維小波母函數 $\psi(x,y)$ 做位移後，再以不同尺度伸縮，與待分析之二維訊號 $G(x,y)$ 做兩次內積。其數學表示式如下所示(Antoine and Murenzi,1996)：

$$S(a,\vec{b})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(x,y)\cdot\psi_{a,\vec{b}}(x,y)dxdy \qquad (1)$$

其中 $\vec{b}=(b_x,b_y)$ 爲位移參數，a 爲尺度參數，調變後的小波函數可以下式表示

$$\psi_{a,\vec{b}}(x,y)=\frac{1}{a}\psi(\frac{x-b_x}{a},\frac{y-b_y}{a}) \qquad (2)$$

上式中的位移參數與空間中之位置點有關，爲一個二維度的參數；但尺度參數 a 則爲一個純量，與成分波的波數(頻率)有關。將調變後的小波與訊號從事內積的理論中(Antoine and Murenzi,1996)，考慮了旋轉函數(rotation)，亦即除了對小波母函數做尺度伸縮以及位置移動外，再把小波母函數以不同角度做旋轉來進行訊號分析，此時尺度參數可改寫爲矩陣型式如下，

$$A=ar_\theta \qquad (3)$$

其中

$$r_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \qquad (4)$$

r_θ 是二維小波轉換之旋轉因子。因此二維小波母函數經由尺度伸縮、位置移動，以及不同角度做旋轉後改寫爲，

$$\psi_{A,\vec{b}}(x,y)=\frac{1}{a}\psi[r_\theta^{-1}(\frac{x-b_x}{a},\frac{y-b_y}{a})] \qquad (5)$$

將以上關係式經整理後得到二維小波轉換式如下：

$$\begin{aligned}&S(a,\theta,b_x,b_y)\\&=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(x,y)\cdot\psi[\frac{(x-b_x)\cos\theta-(y-b_y)\sin\theta}{a},\\&\frac{(x-b_x)\sin\theta+(y-b_y)\cos\theta}{a}]dxdy\end{aligned} \qquad (6)$$

由於某些小波母函數本身不具有方向性，如二維墨西哥帽小波母函數(Mexican hat wavelet)，因此無論將其轉多少角度，其分析結果都一樣。因波數與尺度參數間存在一關係式，本文將尺度參數視爲二維度之向量，即 $\vec{a}=(a_x,a_y)$，則原式改寫爲，

$$S(\vec{a},\vec{b})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(x,y)\cdot\psi_{\vec{a},\vec{b}}(x,y)dxdy \qquad (7)$$

其中 $\psi_{\vec{a},\vec{b}}(x,y)$ 爲對小波母函數分別做 x 方向及 y 方向之位置平移與尺度拉伸，

$$\psi_{\vec{a},\vec{b}}(x,y)=\frac{1}{|\vec{a}|}\psi(\frac{x-b_x}{a_x},\frac{y-b_y}{a_y}) \tag{8}$$

除此二維小波轉換的理論式外，本文根據一維小波轉換係數與能量之關係式(歐，1995)，推導出二維小波轉換係數與能量，如下，

$$E=\frac{1}{C_\psi}\int_0^{b_x}\int_0^{b_y}\int_{-a_x}^{a_x}\int_{-a_y}^{a_y}\left|WT(a_x,a_y,b_x,b_y)\right|^2\cdot\frac{da_y da_x db_y db_x}{\left|\sqrt{a_x^2+a_y^2}\right|^2} \tag{9}$$

$WT(a_x,a_y,b_x,b_y)$ 爲訊號經小波轉換後之係數，而

$$C_\psi=\int_{-k_x}^{k_x}\int_{-k_y}^{k_y}\frac{\left|\hat{\psi}(k_x,k_y)\right|^2}{\sqrt{k_x^2+k_y^2}}dk_x dk_y \tag{10}$$

2.2 二維小波母函數

小波轉換分析訊號之意義是將訊號與小波函數做內積，而不同之小波函數各自擁有其性質，由各領域不同之需求而被選用。小波分析之結果與小波母函數之選定有關，不同之小波母函數分析訊號，其時-頻視窗寬度亦不同，影響了分析訊號時之解析力。小波母函數的頻率視窗寬度愈小，在頻率域上對頻率之解析能力愈佳；而小波母函數的時間視窗寬度愈小，在時域上對頻率之解析能力愈佳。理論上若小波母函數之時-頻視窗之面積愈小，對於分析訊號之解析力就愈好，根據海森堡測不準原理(Heisenberg Uncertainty Principle)得知(Strang and Nguyen, 1996)，時頻視窗面積需滿足下式：

$$(2\Delta_\psi)\cdot(2\Delta_{\hat{\psi}})\geq 2 \tag{11}$$

其中時間域之視窗寬度爲 $2a\Delta_\psi$，頻率域之視窗寬度爲 $(2\Delta_{\hat{\psi}})/a$。因此實際應用時，若要獲得最佳之頻率域解析能力(即頻率域視窗寬度變小)，其時間域之解析力會因此而變差(即時間域視窗寬度變大)，反之亦是如此。

由於 Morlet 小波在訊號分析中，其時間-頻率視窗之面積最小(最趨近 2)，因此其解析力較佳(歐，1995)，故本文選擇 Morlet 小波作爲分析波場訊號之工具。二維 Morlet 小波母函數於空間域之關係式如下：

$$\psi(x,y)=e^{i\vec{k}_0(x,y)}\cdot e^{(-\frac{1}{2}(\varepsilon^{-1}x^2+y^2))} \tag{12}$$

其中 $\vec{k}_0$ 爲小波函數於頻率域(經傅立葉轉換後)之中心點，ε 爲二維小波函數之形狀參數。二維 Morlet 小波於空間中之波形如下圖所示，

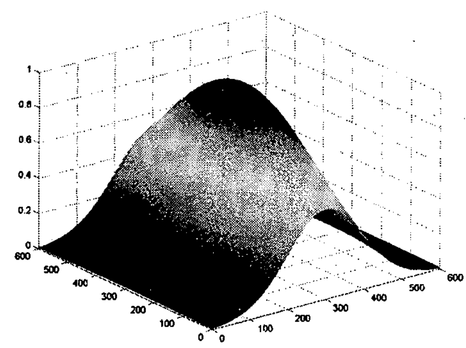

圖 1 二維 Morlet 小波於空間域之波形

由於二維 Morlet 小波具有方向性(oriented wavelet)，因此當小波母函數旋轉不同角度時，所分析之結果就會有所差異。

2.3 尺度參數與波數之關係

本文藉由一維小波轉換中尺度參數與頻率的轉換關係式，推導二維小波轉換中尺度參數與成分波之波數之關係，推導結果如下式，

$$\bar{k}=\frac{\omega^*}{\bar{a}}=\frac{1}{\bar{a}}\times\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\vec{k}'\right|\cdot\left|\hat{\psi}(\vec{k}')\right|^2 d\vec{k}'}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{\psi}(\vec{k}')\right|^2 d\vec{k}'} \tag{13}$$

其中 $\hat{\psi}(\vec{k})$ 爲二維小波母函數 $\psi(x,y)$ 之傅立葉轉換，亦即在頻率域上之分布，如下式所示。

$$\hat{\psi}(\vec{k})=\sqrt{5}\cdot\exp\left\{-0.5\cdot[k_x^2+\left(k_y-5.6\right)^2]\right\} \tag{14}$$

藉由以上關係式推導出 x 方向與 y 方向尺度參數與波數間的關係分別如下，

$$k_x= [\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{k_x'^2+k_y'^2}\left|\sqrt{5}\exp\{-0.5[5k_x'^2+(k_y'-5.6)^2]\}\right|^2 dk_x' dk_y'] /[a_x\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sqrt{5}\exp\{-0.5[5k_x'^2+(k_y'-5.6)^2]\}\right|^2 dk_x' dk_y'] \tag{15}$$

$$k_{y} = [\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{k_x'^2+k_y'^2}\left|\sqrt{5}\exp\{-0.5[5k_x'^2+(k_y'-5.6)^2]\}\right|^2 dk_x'dk_y'] / [a_y\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sqrt{5}\exp\{-0.5[5\cdot k_x'^2+(k_y'-5.6)^2]\}\right|^2 dk_x'dk_y'] \quad (16)$$

由式(15)、(16)可得知，小波轉換後 x 方向與 y 方向之尺度參數 (a_x, a_y) 與波數(k_x, k_y)之間存在一倒數關係，亦即當尺度參數愈大時(代表小波母函數被拉展開)，波數會對應減小。

2.4 位移參數與空間位置之關係

同理，本文推導二維小波轉換分析影像訊號後，位移參數 (b_x, b_y) 與空間位置(x,y)的關係如下：

$$x = b_x + a \times \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x'\left|e^{i\cdot 5.6\cdot(x',y')}\times e^{(-0.5)(0.2\cdot x'^2+y'^2)}\right|^2 dx'dy'}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{i\cdot 5.6\cdot(x',y')}\times e^{(-0.5)(0.2\cdot x'^2+y'^2)}\right|^2 dx'dy'} \quad (17)$$

$$y = b_x + a \times \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y'\left|e^{i\cdot 5.6\cdot(x',y')}\times e^{(-0.5)(0.2\cdot x'^2+y'^2)}\right|^2 dx'dy'}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{i\cdot 5.6\cdot(x',y')}\times e^{(-0.5)(0.2\cdot x'^2+y'^2)}\right|^2 dx'dy'} \quad (18)$$

由式(17)、(18)可得知，二維小波轉換後，位置點與尺度參數及位移參數間存在一線性關係，當尺度參數及位移參數愈大時，所對應於空間中 x 值(或 y 值)會愈大。

2.5 二維小波轉換的視窗寬度

傅立葉轉換分析訊號是將訊號之全部範圍與正弦(或餘弦)函數做內積，分析結果是一個平均值，而小波轉換其特性爲訊號之解析範圍會隨著頻率之不同而隨之改變，如圖 2 所示(Farge, et al. 1993)。

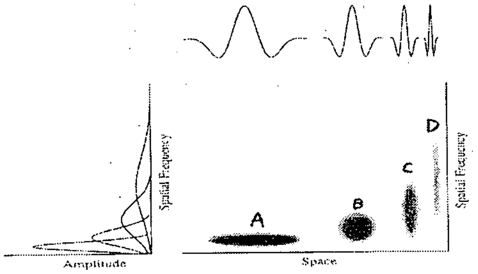

圖 2 小波函數的調變視窗示意圖

二維小波轉換應用在空間影像的分析後，從小波理論可得知，根據影像不同位置所包含的成分波訊息強弱，將計算獲得多個有意義的分析結果，代表的是不同位置、不同頻率(成分波)的訊息。而此位置或頻率並非單一數值，而係一個視窗大小，稱之爲空間視窗與頻率視窗，本文藉由一維小波轉換中時頻視窗之視窗寬度關係式(Foufoula-Georgious and Kumar,1994)推導出二維小波轉換中空間視窗寬度與尺度參數之關係式如下，

$$B_x = B_y = 2\times|\vec{a}|\times [\int_{-\infty}^{\infty}(x-x^*, y-y^*)^2\left|e^{i\cdot 5.6\cdot(x,y)}\cdot e^{(-0.5)(0.2x^2+y^2)}\right|^2 dxdy]^{0.5} / [\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{i\cdot 5.6\cdot(x,y)}\times e^{(-0.5)(0.2\cdot x^2+y^2)}\right|^2 dxdy]^{0.5} \quad (19)$$

由式(19)得知二維小波轉換時，其尺度參數愈大(波數愈小)時，其空間域之視窗寬度會愈大，而空間視窗寬度不會隨著空間中之位置的改變而隨之產生變化。而頻率(在二維空間爲波數)域之解析範圍會隨之增大，波數視窗寬度也藉由一維小波轉換時頻視窗寬度關係式推導得到，可以下式計算。

$$Bk_x = Bk_y = \frac{2}{|a|}\times [\int_{-\infty}^{\infty}(|\vec{k}|-k^*)^2\left|\sqrt{5}\exp\{-0.5[k_x^2+(k_y-5.6)^2]\}\right|^2 dk_x dk_y]^{0.5} \; [\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sqrt{5}\exp\{-0.5[k_x^2+(k_y-5.6)^2]\}\right|^2 dk_x dk_y]^{0.5} \quad (20)$$

由上式可知成分波波數分佈之視窗寬度會隨著尺度參數改變而產生變動，且尺度參數愈大(波數愈小)時，其波數視窗寬度會愈小，而波數視窗寬度不會隨著空間中之位置的改變而隨之產生變化，而鄰近訊號之解析範圍會相互重疊，如圖 3 (Mallat, 1998)。

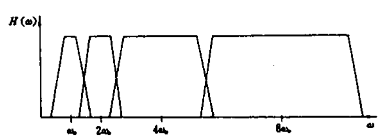

圖 3 小波轉換頻域視窗分佈之示意圖

三、分析模擬波場的影像

本文爲了驗證上述的導演，本章將分析模擬的

波場影像，分別利用傅利葉轉換及小波轉換來從事波場分析，藉此也可以了解小波轉換應用於波場分析之特性以及與傅立葉轉換的異同。

3.1 波場影像的模擬

本文模擬一個來自四個不同方向規則波所形成之波場影像，波場模擬的數學式如下所示，

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{4} a_i \cos(kx\sin\theta_i + ky\cos\theta_i) \quad (21)$$

本文模擬一個包含波場資訊的影像，其大小爲200×200 公尺，需說明的一點是，爲了後續驗證的用途，本文假設此四個成分波並不互相疊加，而是分別分布在四個象限中，各成分波之模擬條件如表 1 所示，在此波向之定義與風向之定義相同，模擬之波場影像繪於圖 4。

表 1 模擬波場之條件表

成分波	成分波模擬範圍	波高 (m)	波長 (m)	波向 (°)
1	(x,y)=(0~100,0~100)	0.2	10	45
2	(x,y)=(0~100,100~200)	0.3	12	180
3	(x,y)=(100~200,0~100)	0.15	8	-60
4	(x,y)=(100~200,100~200)	0.25	10	60

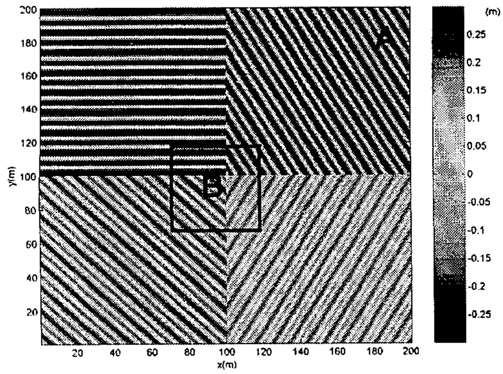

圖 4 四個成分波之模擬波場影像

(A、B 爲後文分析案例與視窗範圍)

3.1.1 傅立葉轉換分析模擬波場之結果

圖 5 顯示傅立葉轉換分析上述全幅模擬影像結果，傅立葉轉換會產生對原點對偁的分析結果，分析結果顯示該影像中有四對成分波，本文僅取每對其中之一，並列出其主波數位置分別爲(kx,ky)=(0.44,0.44)、(0,0.52)、(0.68,-0.39)、 (0.54,0.31)，在其餘位置的能量皆幾近於零。計算得到的波數分別爲 0.62、0.52、0.78 以及 0.62，對應的波長和波向分別爲 10m (45 度)、12m (180 度)、8m (-60 度)以及 10m (60 度)，符合所設定的模擬波場條件。

3.1.2 小波轉換分析模擬波場之結果

對所模擬之波場影像從事小波轉換分析後，於影像上不同位置，可計算得代表鄰近位置(即空間視窗範圍)的波場資訊，如圖 6 中顯示的是圖 4 影像中鄰近[A]點的分析結果，圖中顯示能量尖峰位置位於波數(kx,ky)= (0.54,0.31)，其餘位置波數之能量皆幾近於零，表示所分析之範圍中只有該成分波存在，計算得到的波數爲 0.62、波長 10 m、波向 60 度，這正是該象限模擬的輸入條件，而根據本文的模擬方法，確實在該象限僅有單一成分波存在，此資訊經由小波轉換可清楚地被萃取出來。

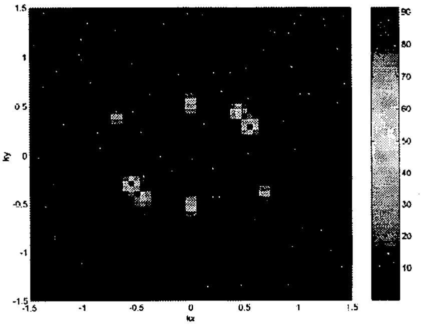

圖 5 傅利葉轉換分析全幅模擬影像之結果

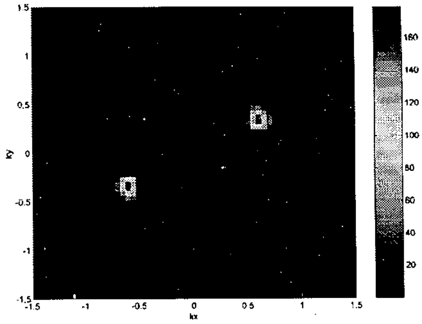

圖 6 二維小波轉換分析模擬影像，在位置[A]附近之波場

若分析圖 4 波場影像中[B]點附近之波場時，結果如圖 7 所示，共分析出(0.44,0.44)、(0,0.52)、(0.68,-0.39)和 (0.54,0.31)等四個峰值，經驗證得知分別爲本文所模擬的四個成分波，此乃由於分析點[B]的空間視窗大小包含了四個象限(如圖 4 中方框)，也就是四個成分波的訊息均被納入分析，因此出現了圖 7 的結果，因爲本文模擬的四個成分波的振幅設定爲相等，因此圖 7 中得到的四個成分能量的大小正比於視窗包含到各象限的大小，也就是成分波訊息的強弱。

小波轉換除了可分析出空間中各位置點之波數譜特性外，亦能求得不同成分波於波場中分佈的資訊。爲驗證此一特性，本文同樣分析圖 4 的模擬波場，在此僅列出波數(kx,ky)=(0.44,0.44)這個成分波的波場分佈結果，分析結果如圖 8 所示，於該波數條件下，小波函數之空間視窗寬度範圍爲(Δx、Δy)=(7.7, 7.7)m，波數視窗寬度範圍爲(Δk_x、Δk_y)=(1.3,1.3)，在圖 8 中(x<100，y<100)的範圍中出現了主要的波場訊息，於波場其它範圍之能量則趨近於零，顯示波數(kx,ky)=(0.44,0.44)之成分波主要分布在該區域中，此與模擬條件不謀而合。同理，以小波轉換分析其它成分波波數條件時，可求得該特定成分波在空間中的分佈情形。

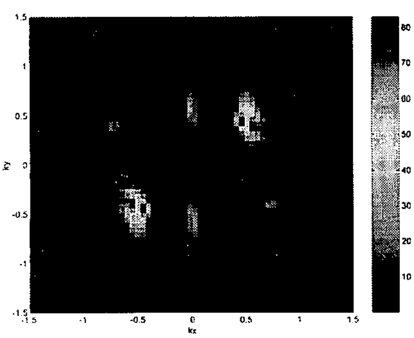

圖 7 二維小波轉換分析模擬影像，在位置[B]附近之波場

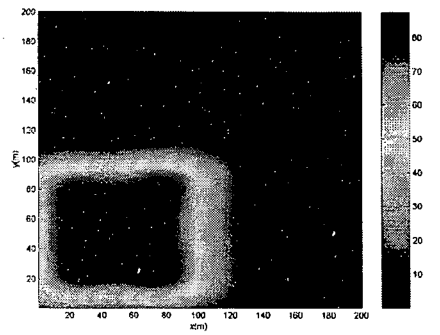

圖 8 二維小波轉換分析模擬影像，成分波 1 [(kx,ky)= (0.44,0.44)]之波場空間分布

四、結論與建議

從以上之研究與分析，本文對於二維小波轉換於波場之分析作以下幾點結論與建議：

1. 應用二維小波轉換於波場影像分析時，可以獲得影像中不同位置的波場分布，也可以分析特定成分波在空間上的演變行爲。
2. 小波函數分析訊號之解析範圍會隨著空間中成分波波數之改變而產生變動，且尺度參數愈大(波數愈小)時，其解析範圍會愈大，但解析範圍不會隨著空間中之位置的改變而隨之產生變化。
3. 由於小波轉換解析與傅立葉分析對分析訊號的解析力不同，因此除了在相當完美的條件(統一性波場)時可能有相同的結果之外，大部分的分析均會產生迥異的結果，須對此結果詳加判讀。
4. 本文目前著重理論的推導與驗證，在確認導證無誤後，分析實際的 RAR 或 SAR 影像爲後續的重要工作，然而分析結果的解讀始爲其中主要的探討對象。
5. 藉由小波轉換分析不同成分波於空間波場之分佈變化，可以用來分析波浪在近岸的折繞射等現象。

謝誌

本文爲國科會研究計劃部分成果，計劃編號 **[NSC 89-2611-E006-074]**，在此特別感謝國科會經費贊助以及成大測量所蔡展榮老師在小波理論方面的指導。

參考文獻

1. 歐文松(1995)"小波轉換於分析淺化波浪特性之應用"，碩士論文，成功大學水利及海洋工程研究所，台南。
2. Foufoula-Georgious E. and P. Kumar (1994) *Wavelet in geophysics*, Academic Press, London.
3. Antoine J. P. and R. Murenzi (1996) "Two dimensional directional wavelets and the scale-angle representation," *Signal Processing*, Vol.52, pp.259-281.
4. Strang, G. and T. Nguyen (1996) *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley.
5. Farge, M., J. C. R. Hunt and J. C. Vassilicos (1993) *Wavelets, fractals and Fourier transforms*: based on the proceedings of a conference on wavelets, fractals and Fourier transforms held at Newnham College, Cambridge.
6. Mallat, S (1989) "Multifrequency Channel Decomposition of Images and Wavelet Models," *IEEE Trans. On Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 37, No., 12, pp. 2091-2110.